BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP

TOÁN 12

SÁCH GIÁO VIÊN



KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

HÀ HUY KHOÁI (Tổng Chủ biên)
CUNG THẾ ANH – ĐẶNG HÙNG THẮNG (đồng Chủ biên)
NGUYỄN ĐẠT ĐĂNG – NGUYỄN THỊ KIM SƠN

CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP
TOÁN 12

SÁCH GIÁO VIÊN

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

QUY ƯỚC VIẾT TẮT DÙNG TRONG SÁCH

HĐ	Hoạt động
HS	Học sinh
GDPT	Giáo dục phổ thông
GV	Giáo viên
SBT	Sách bài tập
SCĐ	Sách Chuyên đề học tập Toán 12
SGK	Sách giáo khoa
SGV	Sách giáo viên
THCS	Trung học cơ sở
THPT	Trung học phổ thông

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

LỜI NÓI ĐẦU

Sách giáo viên Chuyên đề học tập Toán 12 là tài liệu giúp giáo viên hiểu rõ các vấn đề về nội dung, mức độ yêu cầu, phương pháp giảng dạy sách *Chuyên đề học tập Toán 12*. Cũng có thể hiểu *Sách giáo viên Chuyên đề học tập Toán 12* là tài liệu hướng dẫn sử dụng sách *Chuyên đề học tập Toán 12* trong công tác dạy học.

Với mong muốn tạo điều kiện cho giáo viên chủ động, sáng tạo trong giảng dạy, *Sách giáo viên Chuyên đề học tập Toán 12* chủ yếu làm rõ các vấn đề sau:

1. Chương trình môn Toán cấp Trung học phổ thông, bao gồm cả vấn đề phương pháp dạy học được cụ thể hoá trong *Chuyên đề học tập Toán 12* như thế nào.
2. Ý tưởng của tác giả ẩn sau cấu trúc bài học và từng nội dung cụ thể mà giáo viên cần hiểu rõ để truyền tải cho học sinh.
3. Một số gợi ý trong việc tổ chức học tập trên lớp như tổ chức thực hiện các hoạt động được thiết kế trong sách, bao gồm cả các bài luyện tập, vận dụng,...
4. Cung cấp đáp án cho các hoạt động, câu hỏi, bài luyện tập trên lớp, bài vận dụng và bài tập trong sách *Chuyên đề học tập Toán 12*.

Với tinh thần đó, *Sách giáo viên Chuyên đề học tập Toán 12* gồm hai phần:

Phần một: Hướng dẫn chung

Phần này trình bày các vấn đề như: Chương trình (mục tiêu và những điểm cần lưu ý); Giới thiệu chung về sách *Chuyên đề học tập Toán 12* (quan điểm biên soạn, cấu trúc nội dung, cấu trúc các bài học, phương pháp tiếp cận); Phương pháp dạy học, đánh giá kết quả giáo dục.

Phần hai: Hướng dẫn cụ thể

Phần này sẽ đi vào từng chuyên đề, từng bài học với nội dung, thời lượng và mục tiêu cần đạt; một số gợi ý về cách tổ chức giảng dạy hay thực hiện các phần quan trọng của mỗi bài học; Đáp số/Hướng dẫn/Lời giải cho các câu hỏi, bài luyện tập tại lớp, bài vận dụng và bài tập trong sách *Chuyên đề học tập Toán 12*.

Hi vọng, *Sách giáo viên Chuyên đề học tập Toán 12* sẽ là tài liệu hữu ích cho giáo viên khi giảng dạy *Chuyên đề học tập Toán 12*.

CÁC TÁC GIẢ

MỤC LỤC

Trang

Lời nói đầu 3

PHẦN MỘT. HƯỚNG DẪN CHUNG 5

A. Mục tiêu môn Toán 5

B. Giới thiệu sách Chuyên đề học tập Toán 12 8

C. Phương pháp dạy học và đánh giá kết quả giáo dục 14

PHẦN HAI. HƯỚNG DẪN CỤ THỂ 18

Chuyên đề 1. Biến ngẫu nhiên rời rạc. Các số đặc trưng của biến ngẫu nhiên rời rạc 18

Bài 1. Biến ngẫu nhiên rời rạc và các số đặc trưng 19

Bài 2. Biến ngẫu nhiên có phân bố nhị thức và áp dụng 29

Bài tập cuối chuyên đề 1 37

Chuyên đề 2. Ứng dụng toán học để giải quyết một số bài toán tối ưu 44

Bài 3. Vận dụng hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn để giải quyết một số bài toán quy hoạch tuyến tính 45

Bài 4. Vận dụng đạo hàm để giải quyết một số bài toán tối ưu 56

Bài tập cuối chuyên đề 2 65

Chuyên đề 3. Ứng dụng toán học trong một số vấn đề liên quan đến tài chính 70

Bài 5. Tiền tệ. Lãi suất 71

Bài 6. Tín dụng. Vay nợ 78

Bài 7. Đầu tư tài chính. Lập kế hoạch tài chính cá nhân 86

Bài tập cuối chuyên đề 3 94

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

PHẦN MỘT HƯỚNG DẪN CHUNG

A MỤC TIÊU MÔN TOÁN

I Mục tiêu chung của môn Toán

Chương trình môn Toán giúp HS đạt các mục tiêu chủ yếu sau:

1. Hình thành và phát triển năng lực toán học bao gồm các thành tố cốt lõi sau: năng lực tư duy và lập luận toán học; năng lực mô hình hoá toán học; năng lực giải quyết vấn đề toán học; năng lực giao tiếp toán học; năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán.

2. Góp phần hình thành và phát triển ở HS các phẩm chất chủ yếu và năng lực chung theo các mức độ phù hợp với môn học, cấp học được quy định tại Chương trình tổng thể.

3. Có kiến thức, kĩ năng toán học phổ thông, cơ bản, thiết yếu; phát triển khả năng giải quyết vấn đề có tính tích hợp liên môn giữa môn Toán và các môn học khác như Vật lí, Hoá học, Sinh học, Địa lí, Tin học, Công nghệ, Lịch sử, Nghệ thuật,...; tạo cơ hội để HS được trải nghiệm, áp dụng toán học vào thực tiễn.

4. Có hiểu biết tương đối tổng quát về sự hữu ích của toán học đối với từng ngành nghề liên quan để làm cơ sở định hướng nghề nghiệp, cũng như có đủ năng lực tối thiểu để tự tìm hiểu những vấn đề liên quan đến toán học trong suốt cuộc đời.

II Mục tiêu của môn Toán cấp Trung học phổ thông

Môn Toán cấp THPT nhằm giúp HS đạt các mục tiêu chủ yếu sau:

1. Góp phần hình thành và phát triển năng lực toán học với yêu cầu cần đạt: nêu và trả lời được câu hỏi khi lập luận, giải quyết vấn đề; sử dụng được các phương pháp lập luận, quy nạp và suy diễn để hiểu được những cách thức khác nhau trong việc giải quyết vấn đề; thiết lập được mô hình toán học để mô tả tình huống, từ đó đưa ra cách giải quyết vấn đề toán học đặt ra trong mô hình được thiết lập; thực hiện và trình bày được giải pháp giải quyết vấn đề và đánh giá được giải pháp đã thực hiện, phản ánh được giá trị của giải pháp, khái quát hoá được cho vấn đề tương tự; sử dụng được công cụ, phương tiện học toán trong học tập, khám phá và giải quyết vấn đề toán học.

2. Có những kiến thức và kĩ năng toán học cơ bản, thiết yếu về:

- Đại số và Giải tích: Tính toán và sử dụng công cụ tính toán; sử dụng ngôn ngữ và kí hiệu đại số; biến đổi biểu thức đại số và siêu việt (lượng giác, mũ, lôgarit), phương trình, hệ phương trình, bất phương trình; nhận biết các hàm số sơ cấp cơ bản (luỹ thừa, lượng giác, mũ, lôgarit); khảo sát hàm số và vẽ đồ thị hàm số bằng công cụ đạo hàm; sử dụng ngôn ngữ hàm số, đồ thị hàm số để mô tả và phân tích một số quá trình và hiện tượng trong thế giới thực; sử dụng tích phân để tính toán diện tích hình phẳng và thể tích vật thể trong không gian.
- Hình học và Đo lường: Cung cấp những kiến thức và kĩ năng (ở mức độ suy luận lôgic) về các quan hệ hình học và một số hình phẳng, hình khối quen thuộc; phương pháp đại số (vectơ, toạ độ) trong hình học; phát triển trí tưởng tượng không gian; giải quyết một số vấn đề thực tiễn đơn giản gắn với Hình học và Đo lường.
- Thống kê và Xác suất: Hoàn thiện khả năng thu thập, phân loại, biểu diễn, phân tích và xử lí dữ liệu thống kê; sử dụng các công cụ phân tích dữ liệu thống kê thông qua các số đặc trưng đo xu thế trung tâm và đo mức độ phân tán cho mẫu số liệu không ghép nhóm và ghép nhóm; sử dụng các quy luật thống kê trong thực tiễn; nhận biết các mô hình ngẫu nhiên, các khái niệm cơ bản của xác suất và ý nghĩa của xác suất trong thực tiễn.

3. Góp phần giúp HS có những hiểu biết tương đối tổng quát về các ngành nghề gắn với môn Toán và giá trị của nó; làm cơ sở cho định hướng nghề nghiệp sau cấp THPT; có đủ năng lực tối thiểu để tự tìm hiểu những vấn đề liên quan đến toán học trong suốt cuộc đời.

III Mục tiêu của Chuyên đề học tập môn Toán lớp 12

Cụ thể hoá mục tiêu môn Toán, Chuyên đề học tập Toán lớp 12 nhằm giúp HS đạt được các kiến thức, kĩ năng chủ yếu sau:

1. Biến ngẫu nhiên rời rạc. Các số đặc trưng của biến ngẫu nhiên rời rạc

- Nhận biết được khái niệm biến ngẫu nhiên rời rạc; phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc; kì vọng, phương sai, độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên rời rạc.
- Lập và đọc được bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc với một số ít giá trị.
- Tính được kì vọng, phương sai và độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên rời rạc.
- Giải thích được ý nghĩa thực tiễn của các số đặc trưng của biến ngẫu nhiên rời rạc.

- Vận dụng được kiến thức về xác suất, các số đặc trưng của biến ngẫu nhiên rời rạc để giải quyết một số bài toán thực tiễn (ví dụ: tìm phương án cho năng suất cao, tìm phương án để rủi ro là ít nhất,...).
- Nhận biết được khái niệm về phép thử lặp và công thức Bernoulli.
- Nhận biết được khái niệm phân bố nhị thức. Nhận biết được ý nghĩa của phân bố nhị thức.
- Vận dụng phân bố nhị thức để giải một số bài toán liên quan đến thực tiễn.

2. Ứng dụng toán học để giải quyết một số bài toán tối ưu

- Vận dụng được các kiến thức về hệ bất phương trình bậc nhất để giải quyết một số bài toán quy hoạch tuyến tính.
- Vận dụng được các kiến thức về đạo hàm để giải quyết một số bài toán tối ưu xuất hiện trong thực tiễn (ví dụ: bài toán tối ưu liên quan đến khoảng cách, thời gian,...).
- Vận dụng được các kiến thức về đạo hàm để giải quyết một số bài toán tối ưu trong kinh tế (ví dụ: bài toán tối ưu hoá chi phí sản xuất, bài toán tối ưu hoá lợi nhuận,...).

3. Ứng dụng toán học trong một số vấn đề liên quan đến tài chính

- Nhận biết được một số vấn đề về tiền tệ.
- Thiết lập được kế hoạch tài chính cá nhân cho các nhu cầu dài hạn như giáo dục hoặc sống tự lập.
- Nhận biết được một số vấn đề về lãi suất và vay nợ của các tổ chức tín dụng (như ngân hàng, quỹ tín dụng,...).
- Tính được lãi suất được hưởng qua tiền tiết kiệm và các giá trị thực chất có tính đến lạm phát.
- Tính được lãi suất cần trả cho thẻ tín dụng, phí sử dụng thẻ (bao gồm các giao dịch).
- Nhận biết được kết quả của việc trả các khoản tiền nợ đúng thời hạn, bao gồm hồ sơ tín dụng và giá trị tín dụng.
- Vận dụng được kiến thức toán học (như các kiến thức về tỉ số, tỉ số phần trăm, phép tính luỹ thừa và lôgarit) trong việc giải quyết một số vấn đề về lãi suất và vay nợ của các tổ chức tín dụng (như ngân hàng, quỹ tín dụng,...).
- Nhận biết được một số vấn đề về đầu tư.
- Vận dụng được kiến thức toán học (như các kiến thức về tỉ số, tỉ số phần trăm, đạo hàm, cách tìm giá trị cực trị của biểu thức) trong việc giải quyết một số vấn đề về đầu tư.
- Giải thích được rằng các khoản đầu tư có thể tăng giá trị và cũng như tiền, có thể giảm giá trị nếu lạm phát vượt tỉ lệ lãi suất.

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

B GIỚI THIỆU SÁCH CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP TOÁN 12

I Quan điểm biên soạn sách Chuyên đề học tập Toán 12

Khi biên soạn sách *Chuyên đề học tập Toán 12*, các tác giả bám sát quan điểm sau:

1. *Sách Chuyên đề học tập Toán 12 được biên soạn nhằm đáp ứng các yêu cầu chung đối với SGK mới.*

- Tuân thủ định hướng đổi mới giáo dục phổ thông với trọng tâm là chuyển nền giáo dục từ chú trọng truyền thụ kiến thức sang giúp HS hình thành, phát triển toàn diện phẩm chất và năng lực.
- Bám sát các tiêu chuẩn SGK mới theo Thông tư số 33/2017 của Bộ Giáo dục và Đào tạo ban hành ngày 22 tháng 12 năm 2017.

2. *Tư tưởng chủ đạo trong Chuyên đề học tập Toán 12 được thể hiện rõ từ cấu trúc của sách đến cách tiếp cận các nội dung giáo dục.*

- Đổi mới SGK theo mô hình phát triển phẩm chất và năng lực của HS nhưng không xem nhẹ vai trò của kiến thức. Kiến thức và kĩ năng là hai nhân tố quan trọng để phát triển phẩm chất và năng lực của HS; đồng thời chúng có quan hệ mật thiết với nhau: có kiến thức thì mới hình thành và phát triển được kĩ năng; ngược lại, có rèn luyện và nâng cao kĩ năng thì kiến thức mới được củng cố và phát triển sâu sắc.
- Kiến thức Toán không chỉ phát triển từ chính Toán học mà quan trọng hơn, còn bắt nguồn từ cuộc sống và phục vụ cho cuộc sống.
- Nội dung và phương pháp giáo dục phải phù hợp với đặc điểm tâm lí và trải nghiệm của HS lớp 12.
- Các năng lực chung và năng lực toán học có quan hệ liên kết, gắn bó, hỗ trợ lẫn nhau, cùng nhau phát triển. Do đó, bên cạnh các năng lực vốn đã được coi trọng như năng lực tư duy lập luận toán học, năng lực mô hình hoá toán học, năng lực giải quyết vấn đề toán học, không thể xem nhẹ các năng lực như: năng lực giao tiếp toán học (đọc, nghe, viết, diễn đạt các nội dung toán học), năng lực tự học, năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán.
- Nội dung *Chuyên đề học tập Toán 12* phải bảo đảm tính tích hợp nội môn và liên môn, tính phân hoá trong giáo dục và hỗ trợ tốt cho GV trong việc đổi mới phương pháp dạy học.

II Cấu trúc nội dung

Chuyên đề học tập Toán 12 có thời lượng 35 tiết, gồm ba chuyên đề: "Biến ngẫu nhiên rời rạc. Các số đặc trưng của biến ngẫu nhiên rời rạc"; "Ứng dụng toán học để giải quyết một số bài toán tối ưu"; "Ứng dụng toán học trong một số vấn đề liên quan đến tài chính". Đây là phần lựa chọn của chương trình môn Toán lớp 12, thường là dành cho những HS theo định hướng khoa học tự nhiên và công nghệ.

III Cấu trúc bài học

1. *Thiết kế bài học được xác định là yếu tố quan trọng nhất trong việc hỗ trợ GV đổi mới phương pháp giảng dạy và giúp HS phát triển năng lực và phẩm chất.*

- Bên cạnh các phẩm chất trách nhiệm, chăm chỉ, trung thực được thể hiện xuyên suốt quá trình học tập và báo cáo kết quả học tập, các phẩm chất khác như yêu nước, nhân ái,... cũng được chú ý trong việc lựa chọn mô hình, chất liệu, cách thể hiện nội dung.
- Bên cạnh các năng lực tư duy và lập luận toán học, giao tiếp toán học, sử dụng công cụ và phương tiện học toán, các năng lực giải quyết vấn đề toán học, mô hình hoá toán học được chú ý thoả đáng.
- Cấu trúc của các bài học trong *Chuyên đề học tập Toán 12* tạo điều kiện cho GV vận dụng sáng tạo các phương pháp và hình thức tổ chức dạy học, lấy hoạt động của HS làm trung tâm; tạo cơ hội và khuyến khích HS tích cực, chủ động, sáng tạo trong học tập.
- Các bài học được xây dựng theo hướng cho HS đi từ các vấn đề của cuộc sống đến các khái niệm, định lí toán học, sau đó, từ những hiểu biết toán học quay lại giải quyết các vấn đề của cuộc sống, thể hiện rõ thông điệp "Kết nối tri thức với cuộc sống" của bộ sách.

2. *Mỗi bài học trong Chuyên đề học tập Toán 12 gồm có bốn thành phần cơ bản là Mở đầu, Hình thành kiến thức mới, Luyện tập, Vận dụng. Tuy vậy, trong khi phần Mở đầu dành chung cho toàn bài học, các phần còn lại đi theo các mục trong bài học.*

- Phần đầu mỗi bài học là *Tên bài học* và *Phần định hướng*, gồm hai ô là ô Thuật ngữ và ô Kiến thức, kĩ năng. Phần định hướng này giúp HS xác định một cách nhanh chóng những khái niệm cơ bản, những kiến thức kĩ năng cơ bản cần đạt được sau mỗi bài học.
- *Mở đầu* bài học đưa ra tình huống làm nảy sinh nhu cầu học tập, nó có thể là một bài toán thực tế đại diện, hay là một đoạn dẫn nhập để mở ra một chân trời tri thức.
- Sau mở đầu, bài học được chia thành các mục, mỗi mục gồm một hoặc một vài đơn vị kiến thức. Trong mỗi mục, vòng lặp "Hoạt động hình thành kiến thức,

Khung kiến thức, Ví dụ, Luyện tập" được chạy theo từng đơn vị kiến thức. Hoạt động Vận dụng (thường là vào các vấn đề mang tính thực tế) được đưa ra khi HS đã đạt được một lượng kiến thức, kĩ năng cần thiết, và thường được đưa ra ở cuối mục.

- *Hoạt động hình thành kiến thức* giúp HS quan sát và trải nghiệm, tính toán và lập luận để có ý niệm sơ bộ về khái niệm, cơ sở trải nghiệm và cơ sở lí luận cho kết luận, từ đó, đi đến khung kiến thức. Các tác giả đã thiết kế các hoạt động hình thành kiến thức với các cách thức khác nhau, để HS đến với tri thức một cách chủ động nhất, tự nhiên nhất, vững chắc nhất có thể. Các hoạt động được chia thành từng bước để vừa sức với HS trong khoảng thời gian cho phép.
- *Khung kiến thức* (xuất hiện chủ yếu sau các hoạt động và đôi khi sau ví dụ) trình bày các kiến thức mang tính lí thuyết của bài học; HS sau đó được sử dụng (trừ khi có yêu cầu rõ chứng minh trong phần bài tập).
- HS có thể học ở các *Ví dụ* về phương pháp và cách trình bày, từ đó thực hành các *Luyện tập* để củng cố kiến thức và kĩ năng.
- Các *Vận dụng* (mang tính thực tế) được đưa ra để HS giải quyết (bao gồm cả tình huống được nêu ra ở đầu bài học) sau khi đã được trau dồi kiến thức và kĩ năng. Hoạt động này giúp HS phát triển năng lực mô hình hoá toán học và năng lực giải quyết vấn đề toán học: xác định mô hình toán học trong bài toán thực tế; giải quyết bài toán toán học; thể hiện, đánh giá ngược trở lại từ kết quả toán học sang kết quả thực tế.
- Cuối mỗi bài học là phần *Bài tập* (được chọn lọc để có số lượng vừa phải) để HS tiếp tục củng cố, rèn luyện kiến thức và kĩ năng ở nhà.
- Mục *"Em có biết?"* cung cấp ngắn gọn cho HS những câu chuyện, thông tin bổ ích và thú vị liên quan tới nội dung học.

3. *Chuyên đề học tập Toán 12 được thiết kế theo hướng GV là người chỉ đạo, tổ chức, giám sát, kiểm tra, gợi ý, giảng giải, chốt kiến thức, kĩ năng; HS tích cực tham gia vào các hoạt động để hình thành, củng cố và phát triển kiến thức, kĩ năng, học đến đâu vững tới đó.*

Tuỳ từng hoạt động, tuỳ vào hoàn cảnh thực tế lớp học, GV chủ động, linh hoạt trong hoạt động dạy và học trên lớp. Chẳng hạn, GV chủ động lựa chọn hình thức (thực hiện theo nhóm, hay cá nhân, gọi lên bảng, hay trả lời trực tiếp, kiểm tra chéo hay báo cáo kết quả trực tiếp với GV), chủ động chọn thời điểm, mức độ tương tác với HS (khi nào đưa ra các gợi ý, hỗ trợ, mức độ hỗ trợ tới đâu,...).

Về cơ bản, chức năng của các cấu phần chính trong mỗi bài học như sau:

CHỨC NĂNG	CẤU PHẦN	ĐẶC ĐIỂM
Khởi động	Tình huống mở đầu bài học	Đưa ra tình huống làm nảy sinh nhu cầu học tập, thường là một bài toán thực tế đại diện hay đôi khi là một đoạn dẫn nhập.
Hình thành kiến thức, kĩ năng	Hoạt động hình thành kiến thức	Giúp HS khám phá kiến thức thông qua các hoạt động được chia thành từng bước vừa sức, để đi đến Khung kiến thức.
	Khung kiến thức	Trình bày các kiến thức mang tính lí thuyết của bài học mà HS sau đó được phép sử dụng.
	Ví dụ	HS có thể học ở các ví dụ về phương pháp và cách trình bày để hình thành và rèn luyện kĩ năng tương ứng.
Củng cố kiến thức, rèn luyện kĩ năng	Luyện tập	Rèn luyện kĩ năng cơ bản gắn với đơn vị kiến thức đang học; tình huống tương tự ví dụ trước đó, để HS tự luyện tập trên lớp.
	Thực hành	Rèn luyện kĩ năng sử dụng các công cụ, phương tiện học toán.
Phát triển kiến thức, nâng cao kĩ năng, phát triển năng lực	Vận dụng	Vận dụng mang tính thực tế được đưa ra để HS giải quyết sau khi đã trau dồi kiến thức và kĩ năng. Giúp HS phát triển năng lực toán học, nói riêng là năng lực mô hình hoá toán học và năng lực giải quyết vấn đề toán học.
Củng cố, phát triển kĩ năng, năng lực	Bài tập cuối bài học	Được chọn lọc để có số lượng vừa phải, bảo đảm tính phân hoá; chú trọng các bài tập liên quan đến ứng dụng của toán học trong thực tế và trong các môn học liên quan như Vật lí, Hoá học, Sinh học.

IV Phân bổ thời lượng trong sách giáo khoa Toán 12 và sách Chuyên đề học tập Toán 12

Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán năm 2018 (sau đây gọi tắt là Chương trình) quy định thời lượng (bắt buộc) của môn Toán 12 gồm 105 tiết, phân bổ: 44% cho mạch Giải tích, 35% cho mạch Hình học và Đo lường, 14% cho mạch Thống kê và Xác suất, 7% cho phần Thực hành trải nghiệm.

Bên cạnh 105 tiết nói trên, Chương trình dành 35 tiết cho các chuyên đề học tập. Đây là phần lựa chọn của HS.

Tuỳ thực tế, nhà trường linh hoạt trong việc lựa chọn thời điểm trong năm học để dạy các chuyên đề. Về chuyên môn, cần lưu ý:

- Nội dung của hai chuyên đề "Biến ngẫu nhiên rời rạc. Các số đặc trưng của biến ngẫu nhiên rời rạc" và "Ứng dụng toán học trong một số vấn đề liên quan đến tài chính" nhìn chung độc lập với SGK *Toán 12* (các tác giả đã cố gắng tránh sử dụng xác suất có điều kiện trong các ví dụ, bài tập ở Chuyên đề 3 để chuyên đề này có thể dạy độc lập với SGK *Toán 12*). Do đó có thể dạy vào bất kì thời điểm nào trong năm học.
- Nội dung Bài 4 của chuyên đề "Ứng dụng toán học để giải quyết một số bài toán tối ưu" sử dụng những kiến thức tương ứng trình bày trong Chương I SGK *Toán 12* như dùng đạo hàm xét chiều biến thiên, tìm cực trị, giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số. Do đó cần giảng dạy sau khi HS được học những kiến thức đó trong SGK *Toán 12*.

Chương trình không quy định thời lượng chi tiết cho từng chuyên đề, nhà trường chủ động trong việc phân bổ thời lượng cho từng chuyên đề và từng bài học, đảm bảo giáo dục đạt hiệu quả. Sau đây là đề xuất phân bổ thời lượng của nhóm tác giả sách *Chuyên đề học tập Toán 12* để nhà trường và GV tham khảo.

TÊN CHUYÊN ĐỀ	TÊN BÀI	SỐ TIẾT
Chuyên đề 1. Biến ngẫu nhiên rời rạc. Các số đặc trưng của biến ngẫu nhiên rời rạc	Bài 1. Biến ngẫu nhiên rời rạc và các số đặc trưng	5
	Bài 2. Biến ngẫu nhiên có phân bố nhị thức và áp dụng	5
	Bài tập cuối chuyên đề 1	2
Chuyên đề 2. Ứng dụng toán học để giải quyết một số bài toán tối ưu	Bài 3. Vận dụng hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn để giải quyết một số bài toán quy hoạch tuyến tính	5
	Bài 4. Vận dụng đạo hàm để giải quyết một số bài toán tối ưu	5
	Bài tập cuối chuyên đề 2	2
Chuyên đề 3. Ứng dụng toán học trong một số vấn đề liên quan đến tài chính	Bài 5. Tiền tệ. Lãi suất	3
	Bài 6. Tín dụng. Vay nợ	3
	Bài 7. Đầu tư tài chính. Lập kế hoạch tài chính cá nhân	3
	Bài tập cuối chuyên đề 3	2

V Những điểm cần chú ý về nội dung Chương trình và sách Chuyên đề học tập Toán 12

Chuyên đề học tập Toán 12 có thời lượng 35 tiết, bao gồm ba chuyên đề:

– Chuyên đề 1. Biến ngẫu nhiên rời rạc. Các số đặc trưng của biến ngẫu nhiên rời rạc;

– Chuyên đề 2. Ứng dụng toán học để giải quyết một số bài toán tối ưu;

– Chuyên đề 3. Ứng dụng toán học trong một số vấn đề liên quan đến tài chính.

Đây là những nội dung toán học mới, lần đầu tiên được đưa vào giảng dạy trong chương trình giáo dục toán học phổ thông ở Việt Nam. Điều này có thể gây ra những bỡ ngỡ và khó khăn ban đầu cho GV và HS trong quá trình giảng dạy và học tập. Tuy nhiên, theo quy định của Chương trình, nội dung và yêu cầu cần đạt của các chuyên đề này khá đơn giản, chỉ có tính chất giới thiệu nhập môn và không đòi hỏi nhiều kiến thức chuẩn bị, nên GV và HS hoàn toàn có thể làm chủ được nội dung của các chuyên đề này. Về nội dung cụ thể:

– Chuyên đề 1 trình bày khái niệm biến ngẫu nhiên rời rạc, các số đặc trưng của biến ngẫu nhiên rời rạc, công thức Bernoulli, biến ngẫu nhiên có phân bố nhị thức (gắn với công thức Bernoulli) và áp dụng vào một số bài toán có nội dung thực tiễn.

– Chuyên đề 2 giới thiệu phương pháp hình học để giải một số bài toán quy hoạch tuyến tính hai biến và phương pháp đạo hàm để giải quyết một số bài toán tối ưu đơn giản trong thực tiễn. Có thể coi nội dung của Chuyên đề 2 là những phát triển một cách hệ thống và sâu sắc hơn những nội dung tương ứng đã học ở SGK Toán 10 (phần Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn) và SGK Toán 12 (phần Ứng dụng của đạo hàm).

– Chuyên đề 3 giới thiệu một số kiến thức cơ bản về ứng dụng của toán học trong tài chính: tiền tệ, lãi suất; tín dụng, vay nợ; đầu tư, lập kế hoạch tài chính cá nhân dựa trên công thức lãi đơn, công thức lãi kép và công thức tính niên kim. Đây là những kiến thức phổ thông, cơ bản, thiết yếu về giáo dục tài chính cho công dân thế kỉ XXI.

Nội dung của các chuyên đề trong *Chuyên đề học tập Toán 12* gắn với nhiều ứng dụng phong phú trong thực tiễn nên trong quá trình giảng dạy, khi có thể GV nên tìm cách liên hệ với thực tiễn để làm cho bài học trở nên sinh động hơn và làm cho HS thấy nội dung chuyên đề gần gũi, thiết thực với cuộc sống. Một lưu ý nữa khi giảng dạy là GV cần bám sát các nội dung và yêu cầu cần đạt quy định trong Chương trình, mà đã được cụ thể hoá trong sách *Chuyên đề học tập Toán 12*, để không bị vượt quá yêu cầu cần đạt của Chương trình.

C PHƯƠNG PHÁP DẠY HỌC VÀ ĐÁNH GIÁ KẾT QUẢ GIÁO DỤC

I Phương pháp dạy học

1. *Phương pháp dạy học trong Chương trình môn Toán đáp ứng các yêu cầu cơ bản sau:*

a) Phù hợp với tiến trình nhận thức của HS (đi từ cụ thể đến trừu tượng, từ dễ đến khó); không chỉ coi trọng tính lôgic của khoa học toán học mà cần chú ý cách tiếp cận dựa trên vốn kinh nghiệm và sự trải nghiệm của HS.

b) Quán triệt tinh thần "lấy người học làm trung tâm", phát huy tính tích cực, tự giác, chú ý nhu cầu, năng lực nhận thức, cách thức học tập khác nhau của từng cá nhân HS; tổ chức quá trình dạy học theo hướng kiến tạo, trong đó HS được tham gia tìm tòi, phát hiện, suy luận giải quyết vấn đề.

c) Linh hoạt trong việc vận dụng các phương pháp, kĩ thuật dạy học tích cực; kết hợp nhuần nhuyễn, sáng tạo với việc vận dụng các phương pháp, kĩ thuật dạy học truyền thống; kết hợp các hoạt động dạy học trong lớp học với hoạt động thực hành trải nghiệm, vận dụng kiến thức toán học vào thực tiễn. Cấu trúc bài học bảo đảm tỉ lệ cân đối, hài hoà giữa kiến thức cốt lõi, kiến thức vận dụng và các thành phần khác.

d) Sử dụng đủ và hiệu quả các phương tiện, thiết bị dạy học tối thiểu theo quy định đối với môn Toán; có thể sử dụng các đồ dùng dạy học tự làm phù hợp với nội dung học và các đối tượng HS; tăng cường sử dụng công nghệ thông tin và các phương tiện, thiết bị dạy học hiện đại một cách phù hợp và hiệu quả.

2. *Định hướng phương pháp hình thành, phát triển các phẩm chất chủ yếu và năng lực chung*

a) Phương pháp hình thành, phát triển các phẩm chất chủ yếu

Thông qua việc tổ chức các hoạt động học tập, môn Toán góp phần cùng các môn học và hoạt động giáo dục khác giúp HS rèn luyện tính trung thực, tình yêu lao động, tinh thần trách nhiệm, ý thức hoàn thành nhiệm vụ học tập; bồi dưỡng sự tự tin, hứng thú học tập, thói quen đọc sách và ý thức tìm tòi, khám phá khoa học.

b) Phương pháp hình thành, phát triển các năng lực chung

– Môn Toán góp phần hình thành và phát triển năng lực tự chủ và tự học thông qua việc rèn luyện cho người học biết cách lựa chọn mục tiêu, lập được kế hoạch học tập, hình thành cách tự học, rút kinh nghiệm và điều chỉnh để có thể vận dụng vào các tình huống khác trong quá trình học các khái niệm, kiến thức và kĩ năng toán học cũng như khi thực hành, luyện tập hoặc tự lực giải toán, giải quyết các vấn đề có ý nghĩa toán học.

- Môn Toán góp phần hình thành và phát triển năng lực giao tiếp và hợp tác thông qua việc nghe hiểu, đọc hiểu, ghi chép, diễn tả được các thông tin toán học cần thiết trong văn bản toán học; thông qua sử dụng hiệu quả ngôn ngữ toán học kết hợp với ngôn ngữ thông thường để trao đổi, trình bày được các nội dung, ý tưởng, giải pháp toán học trong sự tương tác với người khác, đồng thời thể hiện sự tự tin, tôn trọng người đối thoại khi mô tả, giải thích các nội dung, ý tưởng toán học.
- Môn Toán góp phần hình thành và phát triển năng lực giải quyết vấn đề và sáng tạo thông qua việc giúp HS nhận biết được tình huống có vấn đề; chia sẻ sự am hiểu vấn đề với người khác; biết đề xuất, lựa chọn được cách thức, quy trình giải quyết vấn đề và biết trình bày giải pháp cho vấn đề; biết đánh giá giải pháp đã thực hiện và khái quát hoá cho vấn đề tương tự.

3. *Phương pháp dạy học môn Toán góp phần hình thành và phát triển năng lực tính toán, năng lực ngôn ngữ và các năng lực đặc thù khác. Cụ thể:*

a) Môn Toán với ưu thế nổi trội, có nhiều cơ hội để phát triển năng lực tính toán thể hiện ở chỗ vừa cung cấp kiến thức toán học, rèn luyện kĩ năng tính toán, ước lượng, vừa giúp hình thành và phát triển các thành tố của năng lực toán học (năng lực tư duy và lập luận, năng lực mô hình hoá, năng lực giải quyết vấn đề; năng lực giao tiếp và năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán).

b) Môn Toán góp phần phát triển năng lực ngôn ngữ thông qua rèn luyện kĩ năng đọc hiểu, diễn giải, phân tích, đánh giá tình huống có ý nghĩa toán học, thông qua việc sử dụng hiệu quả ngôn ngữ toán học kết hợp với ngôn ngữ thông thường để trình bày, diễn tả các nội dung, ý tưởng, giải pháp toán học.

c) Môn Toán góp phần phát triển năng lực tin học thông qua việc sử dụng các phương tiện, công cụ công nghệ thông tin và truyền thông như công cụ hỗ trợ trong học tập và tự học; tạo dựng môi trường học tập trải nghiệm.

d) Môn Toán góp phần phát triển năng lực thẩm mĩ thông qua việc giúp HS làm quen với lịch sử toán học, với tiểu sử của các nhà toán học và thông qua việc nhận biết vẻ đẹp của Toán học trong thế giới tự nhiên.

II Đánh giá kết quả giáo dục

Mục tiêu đánh giá kết quả giáo dục môn Toán là cung cấp thông tin chính xác, kịp thời, có giá trị về sự phát triển năng lực và sự tiến bộ của HS trên cơ sở yêu cầu cần đạt ở mỗi lớp học, cấp học; điều chỉnh các hoạt động dạy học, bảo đảm sự tiến bộ của từng HS và nâng cao chất lượng giáo dục môn Toán nói riêng và chất lượng giáo dục nói chung.

Vận dụng kết hợp nhiều hình thức đánh giá (đánh giá quá trình, đánh giá định kì), nhiều phương pháp đánh giá (quan sát, ghi lại quá trình thực hiện, vấn đáp, trắc nghiệm khách quan, tự luận, kiểm tra viết, bài tập thực hành, các dự án/sản phẩm học tập, thực hiện nhiệm vụ thực tiễn,...) vào những thời điểm thích hợp.

Đánh giá quá trình (hay đánh giá thường xuyên) do GV phụ trách môn học tổ chức, kết hợp với đánh giá của GV các môn học khác, của bản thân HS được đánh giá và của các HS khác trong tổ, trong lớp hoặc đánh giá của cha mẹ HS. Đánh giá quá trình đi liền với tiến trình hoạt động học tập của HS, tránh tình trạng tách rời giữa quá trình dạy học và quá trình đánh giá, bảo đảm mục tiêu đánh giá vì sự tiến bộ trong học tập của HS.

Đánh giá định kì (hay đánh giá tổng kết) có mục đích chính là đánh giá việc thực hiện các mục tiêu học tập. Kết quả đánh giá định kì và đánh giá tổng kết được sử dụng để chứng nhận cấp độ học tập, công nhận thành tích của HS. Đánh giá định kì do cơ sở giáo dục tổ chức hoặc thông qua các kì kiểm tra, đánh giá quốc gia.

Đánh giá định kì còn được sử dụng để phục vụ quản lí các hoạt động dạy học, bảo đảm chất lượng ở cơ sở giáo dục và phục vụ phát triển chương trình môn Toán.

Đánh giá năng lực HS thông qua các bằng chứng biểu hiện kết quả đạt được trong quá trình thực hiện các hành động của HS. Tiến trình đánh giá gồm các bước cơ bản như: xác định mục đích đánh giá; xác định bằng chứng cần thiết; lựa chọn các phương pháp, công cụ đánh giá thích hợp; thu thập bằng chứng; giải thích bằng chứng và đưa ra nhận xét.

Chú trọng việc lựa chọn phương pháp, công cụ đánh giá các thành tố của năng lực toán học. Cụ thể:

- Đánh giá năng lực tư duy và lập luận toán học: Có thể sử dụng một số phương pháp, công cụ đánh giá như các câu hỏi (nói, viết), bài tập,... mà đòi hỏi HS phải trình bày, so sánh, phân tích, tổng hợp, hệ thống hoá kiến thức; phải vận dụng kiến thức toán học để giải thích, lập luận.
- Đánh giá năng lực mô hình hoá toán học: Lựa chọn những tình huống trong thực tiễn làm xuất hiện bài toán toán học. Từ đó, đòi hỏi HS phải xác định được mô hình toán học (gồm công thức, phương trình, bảng biểu, đồ thị,...) cho tình huống xuất hiện trong bài toán thực tiễn; giải quyết được những vấn đề toán học trong mô hình được thiết lập; thể hiện và đánh giá được lời giải trong ngữ cảnh thực tiễn và cải tiến được mô hình nếu cách giải quyết không phù hợp.
- Đánh giá năng lực giải quyết vấn đề toán học: Có thể sử dụng các phương pháp như yêu cầu người học nhận dạng tình huống, phát hiện và trình bày vấn đề cần giải quyết;

mô tả, giải thích các thông tin ban đầu, mục tiêu, mong muốn của tình huống, vấn đề đang xem xét; thu thập, lựa chọn, sắp xếp thông tin và kết nối với kiến thức đã có; sử dụng các câu hỏi (có thể yêu cầu trả lời nói hoặc viết) đòi hỏi người học vận dụng kiến thức vào giải quyết vấn đề, đặc biệt các vấn đề thực tiễn; sử dụng phương pháp quan sát (như bảng kiểm theo các tiêu chí đã xác định), quan sát người học trong quá trình giải quyết vấn đề; đánh giá qua các sản phẩm thực hành của người học (chẳng hạn sản phẩm của các dự án học tập); quan tâm hợp lí đến các nhiệm vụ đánh giá mang tính tích hợp.

- Đánh giá năng lực giao tiếp toán học: Có thể sử dụng các phương pháp như yêu cầu người học nghe hiểu, đọc hiểu, ghi chép (tóm tắt), phân tích, lựa chọn, trích xuất được các thông tin toán học cơ bản, trọng tâm trong văn bản nói hoặc viết; sử dụng được ngôn ngữ toán học kết hợp với ngôn ngữ thông thường trong việc trình bày, diễn đạt, nêu câu hỏi, thảo luận, tranh luận các nội dung, ý tưởng, giải pháp toán học trong sự tương tác với người khác.
- Đánh giá năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán: Có thể sử dụng các phương pháp như yêu cầu người học nhận biết được tên gọi, tác dụng, quy cách sử dụng, cách thức bảo quản, ưu điểm, hạn chế của các công cụ, phương tiện học toán; trình bày được cách sử dụng (hợp lí) công cụ, phương tiện học toán để thực hiện nhiệm vụ học tập hoặc để diễn tả những lập luận, chứng minh toán học.

Khi GV lên kế hoạch bài học, cần thiết lập các tiêu chí và cách thức đánh giá để bảo đảm ở cuối mỗi bài học HS đạt được các yêu cầu cơ bản dựa trên các tiêu chí đã nêu, trước khi thực hiện các hoạt động học tập tiếp theo.

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

PHẦN HAI HƯỚNG DẪN CỤ THỂ

CHUYÊN ĐỀ 1. BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC

A TỔNG QUAN

1 Vị trí, vai trò của chuyên đề

- Biến ngẫu nhiên là một chủ đề lớn trong Xác suất, tương tự như chủ đề Hàm số trong Giải tích. Chuyên đề này giới thiệu một loại biến ngẫu nhiên đơn giản là biến ngẫu nhiên rời rạc và một trường hợp riêng tiêu biểu của nó là biến ngẫu nhiên có phân bố nhị thức.
- Các ví dụ, bài tập và ứng dụng của chuyên đề được lấy từ chính thực tế cuộc sống hoặc rất gần gũi với cuộc sống nhằm trang bị cho HS những kiến thức và kĩ năng để có thể giải quyết những bài toán tính xác suất thường gặp trong thực tế.

2 Cấu tạo chuyên đề

Chương này gồm 2 bài học và 2 tiết ôn tập cuối chuyên đề, được thực hiện trong 12 tiết. Cụ thể như sau:

Bài 1. Biến ngẫu nhiên rời rạc và các số đặc trưng	5 tiết
Bài 2. Biến ngẫu nhiên có phân bố nhị thức và áp dụng	5 tiết
Bài tập cuối chuyên đề 1	2 tiết

3 Một số điểm cần lưu ý

Các bài học trong chuyên đề sử dụng các kiến thức xác suất từ lớp 10 đến lớp 12 như: phương pháp tổ hợp tính xác suất, công thức cộng xác suất, công thức nhân xác suất cho hai biến cố độc lập, công thức nhân xác suất cho hai biến cố bất kì. Vì vậy trước khi vào bài, GV cần ôn tập, củng cố lại cho HS các kiến thức này.

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

B GIỚI THIỆU CHI TIẾT CÁC BÀI HỌC

Bài 1. BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC VÀ CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG (5 tiết)

I MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

Học xong bài này, HS cần đạt được các yêu cầu sau:

- Nhận biết khái niệm biến ngẫu nhiên rời rạc.
- Biết lập bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc.
- Biết tính các số đặc trưng của biến ngẫu nhiên rời rạc (kì vọng, phương sai và độ lệch chuẩn) và hiểu biết được ý nghĩa của chúng.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Năng lực tư duy và lập luận toán học.
- Năng lực giao tiếp toán học.
- Năng lực mô hình hoá toán học.
- Năng lực giải quyết vấn đề toán học thông qua các bài toán thực tiễn.

II NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Cố gắng kết nối bài học trong sách với cuộc sống thực đang diễn ra.
- Phát huy tính tích cực của HS, khắc phục nhược điểm của phương pháp truyền thụ một chiều.
- Tăng cường các hoạt động và luyện tập trên lớp, tăng cường sự tương tác hai chiều giữa GV và HS.
- Sau khi kiến thức mới được hình thành và đóng khung trong hộp kiến thức, sẽ có ví dụ minh hoạ. Ví dụ đóng vai trò làm mẫu cho Luyện tập tiếp nối ngay sau ví dụ đó.
- Các Hoạt động, Luyện tập được thực hiện ngay tại lớp. GV cho HS suy nghĩ 5 – 10 phút rồi hỏi để HS trả lời. Nếu không có HS nào xung phong thì GV chỉ định một HS trả lời. GV sẽ thực hiện việc chữa bài Hoạt động, Luyện tập đó như sau: Nếu HS làm đúng thì GV sẽ trình bày lại lời giải của HS đó cho rõ ràng và mạch lạc, nếu HS đó làm sai thì GV sẽ phân tích xem sai ở đâu. Trong mọi trường hợp việc chữa bài Luyện tập đều rất có ích cho việc củng cố kiến thức mới.

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

III GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

– Dự kiến phân bổ thời gian: 5 tiết, gồm 2 mục sau:

1. Biến ngẫu nhiên rời rạc và bảng phân bố xác suất của nó: 3 tiết.

2. Kì vọng, phương sai và độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên rời rạc: 2 tiết.

– Kết thúc mỗi nội dung, GV lựa chọn các câu hỏi phù hợp trong phần bài tập cuối bài học để HS thực hành và củng cố kiến thức.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
1. BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC VÀ BẢNG PHÂN BỐ XÁC SUẤT CỦA NÓ		
Tình huống mở đầu	Giới thiệu một tình huống xuất hiện biến ngẫu nhiên rời rạc.	GV chỉ cần nêu tình huống để kích thích nhu cầu học tập của HS, chưa yêu cầu HS giải quyết ngay. Khi HS tiếp thu đủ lượng tri thức toán học cần thiết trong bài thì sẽ quay lại giải quyết.
HĐ1	Khởi động cho việc hình thành khái niệm biến ngẫu nhiên rời rạc.	GV cho cả lớp suy nghĩ trong thời gian tối đa 5 phút rồi gọi một em trả lời. *Trả lời:* a) Các giá trị có thể của X là một số thuộc tập $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. b) Trước khi thực hiện việc gieo liên tiếp 6 lần đó, ta không nói trước được X sẽ nhận giá trị nào.
Khung kiến thức	Trình bày khái niệm biến ngẫu nhiên rời rạc.	GV triển khai theo SCĐ.
Ví dụ 1	Minh hoạ cho cách thiết lập bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc.	GV triển khai theo SCĐ.

<table>
<tr><td>Khung kiến thức</td><td>Trình bày khái niệm bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc.</td><td>GV triển khai theo SCĐ.</td></tr>
<tr><td>HĐ2</td><td>Củng cố khái niệm bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc.</td><td>GV cho cả lớp suy nghĩ trong thời gian tối đa 5 phút rồi gọi một em trả lời.
Trả lời:
<table>
<tr><td>X</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>P</td><td>$\frac{1}{8}$</td><td>$\frac{3}{8}$</td><td>$\frac{3}{8}$</td><td>$\frac{1}{8}$</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Khung kiến thức</td><td>Trình bày một tính chất quan trọng của bảng phân bố xác suất.</td><td>GV triển khai theo SCĐ.</td></tr>
<tr><td>Ví dụ 2</td><td>Củng cố việc nhận biết tính chất bảng phân bố xác suất.</td><td>GV triển khai theo SCĐ.</td></tr>
<tr><td>Ví dụ 3</td><td>Minh hoạ ứng dụng bảng phân bố xác suất.</td><td>GV triển khai theo SCĐ.</td></tr>
<tr><td>Ví dụ 4</td><td>Minh hoạ việc thiết lập bảng phân bố xác suất.</td><td>GV triển khai theo SCĐ.</td></tr>
<tr><td>Luyện tập 1</td><td>Luyện tập thiết lập bảng phân bố xác suất. Ví dụ 4 đóng vai trò làm mẫu.</td><td>GV cho cả lớp suy nghĩ trong thời gian 10 – 15 phút rồi gọi một em trả lời.
Giải. Các giá trị có thể của X thuộc tập $\{0; 1; 2; 3\}$. Tiếp theo ta cần tính $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ và $P(X = 3)$.
Số kết quả có thể là $C_{16}^3 = 560$.
* Biến cố $\{X = 0\}$ là biến cố: “Chọn được 3 HS nữ”.
Số kết quả thuận lợi cho biến cố $\{X = 0\}$ là $C_6^3 = 20$.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>
Vậy $P(X=0)=\frac{20}{560}=\frac{2}{56}$.
* Biến cố $\{X=1\}$ là biến cố: "Chọn được 1 HS nam và 2 HS nữ". Có $C_{10}^{1}=10$ cách chọn 1 HS nam trong 10 HS nam và $C_{6}^{2}=15$ cách chọn 2 HS nữ trong 6 HS nữ. Theo quy tắc nhân ta có $10\cdot 15=150$ cách chọn 1 HS nam và 2 HS nữ. Vậy số kết quả thuận lợi cho biến cố $\{X=1\}$ là 150.
Do đó $P(X=1)=\frac{150}{560}=\frac{15}{56}$.
* Biến cố $\{X=2\}$ là biến cố: "Chọn được 2 HS nam và 1 HS nữ". Có $C_{10}^{2}=45$ cách chọn 2 HS nam trong 10 HS nam và $C_{6}^{1}=6$ cách chọn 1 HS nữ trong 6 HS nữ. Theo quy tắc nhân ta có $45\cdot 6=270$ cách chọn 2 HS nam và 1 HS nữ. Vậy số kết quả thuận lợi cho biến cố $\{X=2\}$ là 270.
Do đó $P(X=2)=\frac{270}{560}=\frac{27}{56}$.
* Biến cố $\{X=3\}$ là biến cố: "Chọn được 3 HS nam".
Số kết quả thuận lợi cho biến cố $\{X=3\}$ là $C_{10}^{3}=120$.
Do đó $P(X=3)=\frac{120}{560}=\frac{12}{56}$.
Vậy bảng phân bố xác suất của X là:
<table>
<tr><td>X</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>P</td><td>$\frac{2}{56}$</td><td>$\frac{15}{56}$</td><td>$\frac{27}{56}$</td><td>$\frac{12}{56}$</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Vận dụng 1</td>
<td>Luyện tập ứng dụng tính xác suất thắng cuộc trong một trò chơi.</td>
<td>
a) Tập các giá trị có thể của X là $\{3; 4; ...; 20\}$.
Tiếp theo ta cần tính $P(X=i)$, với $i\in\{3; 4; ...; 20\}$.
Số kết quả có thể là $C_{20}^{3}=1140$.
Biến cố $\{X=k\}$ là biến cố: "Trong 3 quả cầu lấy ra có 1 quả cầu đánh số k và 2 quả cầu đánh số nhỏ hơn k".
Công đoạn 1: Chọn quả cầu mang số k: Có 1 cách chọn.
Công đoạn 2: Chọn 2 quả cầu trong tập $\{1; 2; ...; k-1\}$: Có C_{k-1}^{2} cách chọn.
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td></td><td>Vậy số kết quả thuận lợi là: $1\times C_{k-1}^2 = C_{k-1}^2$.
Vậy $P(X=k)=\frac{C_{k-1}^2}{C_{20}^3}=\frac{(k-1)(k-2)}{2\cdot 1140}=\frac{(k-1)(k-2)}{2\,280}$.
Bảng phân bố xác suất của X là:
<table>
<tr><td>X</td><td>3</td><td>...</td><td>k</td><td>...</td><td>20</td></tr>
<tr><td>P</td><td>$\frac{1}{1140}$</td><td></td><td>$\frac{(k-1)(k-2)}{2\,280}$</td><td></td><td>0,15</td></tr>
</table>
b) Biến cố: "Người chơi thắng" là biến cố hợp của hai biến cố $A=\{X=19\}$ và $B=\{X=20\}$.
Theo công thức cộng hai biến cố xung khắc ta có xác suất thắng của người chơi là:
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$
$=P(X=19)+P(X=20)\approx 0{,}134+0{,}15=0{,}284.$</td></tr>
<tr><td colspan="3">2. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC</td></tr>
<tr><td colspan="3">a) Kì vọng</td></tr>
<tr><td>HĐ3</td><td>Khởi động cho việc hình thành khái niệm kì vọng.</td><td>GV cho cả lớp suy nghĩ trong thời gian tối đa 5 phút rồi gọi một em trả lời.
Trả lời:
Có $0\cdot 10+1\cdot 20+2\cdot 23+3\cdot 25+4\cdot 15+7\cdot 5=236$ vụ vi phạm trong tổng số $10+20+23+25+15+5=98$ tối thứ Bảy. Vậy trung bình có $236:98\approx 2{,}408$ vụ vi phạm Luật Giao thông đường bộ trong 98 tối thứ Bảy đang xét.</td></tr>
<tr><td>Khung kiến thức</td><td>Trình bày khái niệm kì vọng của biến ngẫu nhiên rời rạc.</td><td>GV triển khai theo SCĐ.</td></tr>
<tr><td>Nhận xét</td><td>Nêu ý nghĩa của khái niệm kì vọng.</td><td>GV triển khai theo SCĐ.</td></tr>
<tr><td>Ví dụ 5</td><td>Minh hoạ cách tính kì vọng và ý nghĩa của nó.</td><td>GV triển khai theo SCĐ.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Luyện tập 2</td>
<td>Luyện tập tính kì vọng và ý nghĩa của nó. Ví dụ 5 đóng vai trò làm mẫu.</td>
<td>HS tự làm (trong 5 – 10 phút), sau đó GV gọi một số HS lên bảng trình bày. GV nhận xét bài làm và tổng kết lại phương pháp giải.
Giải. Gọi X là số vụ vi phạm Luật Giao thông đường bộ trên đoạn đường vào tối thứ Bảy. Khi đó X là biến ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân bố xác suất như sau:
<table>
<tr><td>X</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>P</td><td>0,1</td><td>0,2</td><td>0,25</td><td>0,25</td><td>0,15</td><td>0,05</td></tr>
</table>
Ta có:
$E(X) = 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,25 + 3 \cdot 0,25 + 4 \cdot 0,15 + 5 \cdot 0,05 = 2,3.$
Vậy trên đoạn đường vào tối thứ Bảy có trung bình 2,3 vụ vi phạm Luật Giao thông đường bộ.</td>
</tr>
<tr>
<td>Ví dụ 6</td>
<td>Giải quyết một trường hợp trong tình huống mở đầu.</td>
<td>GV triển khai theo SCĐ.</td>
</tr>
<tr>
<td>Vận dụng 2</td>
<td>Tiếp tục giải quyết tình huống mở đầu. Ví dụ 6 đóng vai trò làm mẫu.</td>
<td>a) Giả sử ở vòng 1 Minh chọn câu hỏi loại II. Gọi Y là số điểm Minh nhận được. Ta lập bảng phân bố xác suất của Y.
Gọi A là biến cố: "Minh trả lời đúng câu hỏi loại I"; B là biến cố: "Minh trả lời đúng câu hỏi loại II".
$P(A) = 0,8$; $P(B) = 0,6$.
+) Nếu trả lời sai: Minh được 0 điểm. Cuộc chơi kết thúc tại đây.
Vậy $P(Y = 0) = P\left(\overline{B}\right) = 1 - P(B) = 1 - 0,6 = 0,4$.
+) Nếu trả lời đúng Minh nhận 80 điểm và Minh sẽ bước vào vòng 2, bốc ngẫu nhiên một câu hỏi loại I. Nếu trả lời sai, Minh không có điểm và phải dừng cuộc chơi với số điểm nhận được là 80 + 0 = 80 điểm. Theo giả thiết A và B là hai biến cố độc lập. Theo công thức nhân xác suất cho hai biến cố độc lập ta có
$P(Y = 80) = P\left(B\overline{A}\right) = P(B) \cdot P\left(\overline{A}\right) = 0,6(1 - 0,8) = 0,12.$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td></td><td>Nếu trả lời đúng Minh nhận 80 điểm. Cuộc chơi kết thúc tại đây và Minh được 20 + 80 = 100 điểm. Theo công thức nhân xác suất cho hai biến cố độc lập ta có
$P(Y = 100) = P(BA) = P(B) \cdot P(A) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48.$
Bảng phân bố xác suất của Y là
<table>
<tr><td>Y</td><td>0</td><td>80</td><td>100</td></tr>
<tr><td>P</td><td>0,4</td><td>0,12</td><td>0,48</td></tr>
</table>
Từ đó
$E(Y) = 0 \cdot 0{,}4 + 80 \cdot 0{,}12 + 100 \cdot 0{,}48 = 57{,}6.$
Vậy trung bình Minh được 57,6 điểm.
b) Theo Ví dụ 6 ta có $E(X) = 54{,}4$. Vì $E(Y) > E(X)$ nên nếu ở vòng 1 Minh chọn câu hỏi loại II thì trung bình Minh được nhiều điểm hơn. Vậy ở vòng 1, Minh nên chọn câu hỏi loại II.</td></tr>
<tr><td colspan="3">b) Phương sai và độ lệch chuẩn</td></tr>
<tr><td>HĐ4</td><td>Khởi động cho việc hình thành khái niệm phương sai.</td><td>HS tự làm (trong 10 phút), sau đó GV gọi một số HS lên bảng trình bày. GV nhận xét bài làm và tổng kết lại phương pháp giải.
a) Gọi X và Y tương ứng là doanh thu theo phương án 1 và phương án 2. Ta có:
$E(X) = 8 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} = 4;\ E(Y) = 3 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2} = 4.$
Vậy doanh thu trung bình của hai phương án là như nhau.
b) Nhà đầu tư ưa mạo hiểm sẽ chọn phương án 1.
Nhà đầu tư muốn sự an toàn sẽ chọn phương án 2.</td></tr>
<tr><td>Khung kiến thức</td><td>Trình bày khái niệm phương sai và độ lệch chuẩn.</td><td>GV triển khai theo SCĐ.</td></tr>
<tr><td></td><td>Tính độ lệch chuẩn của hai biến ngẫu nhiên trong HĐ4.</td><td>HS tự làm (trong 5 phút). GV gọi HS lên bảng trình bày.
Trả lời:
$E(X) = 8 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} = 4.$</td></tr>
</table>

		$V(X)=(8-4)^2\cdot\frac{1}{3}+(2-4)^2\cdot\frac{2}{3}=\frac{16+8}{3}=8$ $\Rightarrow \sigma(X)=\sqrt{8}\approx 2{,}828.$ $E(Y)=5\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{2}=4.$ $V(Y)=(5-4)^2\cdot\frac{1}{2}+(3-4)^2\cdot\frac{1}{2}=1$ $\Rightarrow \sigma(Y)=1.$
Nhận xét	Nêu ý nghĩa và một cách tính khác của phương sai và độ lệch chuẩn.	GV triển khai theo SCĐ.
Ví dụ 7	Minh hoạ tính phương sai, độ lệch chuẩn theo hai cách. Ví dụ 7 đóng vai trò làm mẫu.	GV triển khai theo SCĐ.
Luyện tập 3	Luyện tập tính phương sai, độ lệch chuẩn theo hai cách.	– HS tự làm (trong 5 – 10 phút), sau đó GV gọi HS lên bảng trình bày. – GV nhận xét bài làm và tổng kết lại phương pháp giải. *Giải.* $E(X)=0\cdot 0{,}16+1\cdot 0{,}18+2\cdot 0{,}25+3\cdot 0{,}28+4\cdot 0{,}13=2{,}04.$ a) Theo định nghĩa ta có $V(X)=$ $(0-2{,}04)^2\cdot 0{,}16+(1-2{,}04)^2\cdot 0{,}18+(2-2{,}04)^2\cdot 0{,}25$ $+(3-2{,}04)^2\cdot 0{,}28+(4-2{,}04)^2\cdot 0{,}13=1{,}6184.$ $\sigma(X)=\sqrt{1{,}6184}\approx 1{,}2721.$ b) Theo công thức (2) trong SCĐ ta có $V(X)=$ $0^2\cdot 0{,}16+1^2\cdot 0{,}18+2^2\cdot 0{,}25+3^2\cdot 0{,}28+4^2\cdot 0{,}13-2{,}04^2$ $=1{,}6184.$

3. Lựa chọn bài tập

GV lưu ý lựa chọn các câu hỏi trong phần bài tập cuối bài học sao cho phù hợp với tiến trình dạy học. Các câu hỏi về tính kì vọng, phương sai và độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên rời rạc cần thực hiện sau khi kết thúc Mục 2.

IV ĐÁP SỐ/HƯỚNG DẪN/LỜI GIẢI BÀI TẬP

1.1 a) Gọi E là biến cố: "Xảy ra ít nhất một ca cấp cứu vào tối thứ Bảy". Biến cố đối $\overline{E}$ là biến cố: "Không có ca cấp cứu vào tối thứ Bảy". Do đó $\overline{E} = \{X = 0\}$. Vậy

$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}12 = 0{,}88.$

b) Gọi F là biến cố: "Có ít nhất 3 ca cấp cứu vào tối thứ Bảy".

Lập luận tương tự Ví dụ 3 ta có:

$P(B) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 0{,}19 + 0{,}08 + 0{,}02 = 0{,}29.$

c) $E(X) = 1{,}89$; $V(X) = 1{,}4379$; $\sigma(X) \approx 1{,}199$.

1.2. a) Gọi E là biến cố: "Xảy ra ít nhất 2 cuộc gọi". Biến cố đối $\overline{E}$ là: "Xảy ra nhiều nhất 1 cuộc gọi" là hợp của hai biến cố xung khắc: $\{X = 0\}$ và $\{X = 1\}$. Theo quy tắc cộng xác suất: $P\left(\overline{E}\right) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}25 + 0{,}2 = 0{,}45.$

Vậy $P(E) = 1 - P\left(\overline{E}\right) = 1 - 0{,}45 = 0{,}55.$

b) Gọi F là biến cố: "Xảy ra nhiều nhất 3 cuộc gọi". F là hợp của hai biến cố xung khắc: G: "Không xảy ra hoặc xảy ra 1 cuộc gọi" và H: "Xảy ra 2 hoặc 3 cuộc gọi".

Theo quy tắc cộng xác suất: $P(F) = P(G) + P(H)$.

Biến cố G là hợp của hai biến cố xung khắc: $\{X = 0\}$ và $\{X = 1\}$. Theo quy tắc cộng xác suất: $P(G) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}25 + 0{,}2 = 0{,}45.$

Biến cố H là hợp của hai biến cố xung khắc: $\{X = 2\}$ và $\{X = 3\}$. Theo quy tắc cộng xác suất: $P(H) = P(X = 2) + P(X = 3) = 0{,}15 + 0{,}15 = 0{,}3.$

Vậy $P(F) = P(G) + P(H) = 0{,}45 + 0{,}3 = 0{,}75.$

c) $E(X) = 0 \cdot 0{,}25 + 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}15 + 3 \cdot 0{,}15 + 4 \cdot 0{,}13 + 5 \cdot 0{,}12 = 2{,}07.$

$V(X) = 0 \cdot 0{,}25 + 1 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}15 + 9 \cdot 0{,}15 + 16 \cdot 0{,}13 + 25 \cdot 0{,}12 - 2{,}07^2 = 2{,}9451.$

$\sigma(X) \approx 1{,}7161.$

1.3. Gọi X là số thẻ màu đỏ trong ba thẻ rút ra.

a) $P(X=0)=\dfrac{C_6^3}{C_{16}^3}=\dfrac{2}{56}$; $P(X=1)=\dfrac{C_{10}^1C_6^2}{C_{16}^3}=\dfrac{15}{56}$;

$P(X=2)=\dfrac{C_{10}^2C_6^1}{C_{16}^3}=\dfrac{27}{56}$; $P(X=3)=\dfrac{C_{10}^3}{C_{16}^3}=\dfrac{12}{56}$.

Vậy bảng phân bố xác suất của X là:

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{2}{56}$	$\dfrac{15}{56}$	$\dfrac{27}{56}$	$\dfrac{12}{56}$

$E(X)=\dfrac{1\cdot 15+2\cdot 27+3\cdot 12}{56}=\dfrac{105}{56}$;

$V(X)=\dfrac{1\cdot 15+4\cdot 27+9\cdot 12}{56}-\dfrac{105^2}{56^2}=\dfrac{231}{56}-\dfrac{105^2}{56^2}=\dfrac{1911}{3136}$.

1.4. a) Ta có

$P(X=0)=0{,}6\cdot 0{,}6=0{,}36$; $P(X=1)=0{,}4\cdot 0{,}6+0{,}6\cdot 0{,}4=0{,}48$;

$P(X=2)=0{,}4\cdot 0{,}4=0{,}16$.

$P(Y=0)=0{,}5\cdot 0{,}5=0{,}25$; $P(Y=1)=0{,}5\cdot 0{,}5+0{,}5\cdot 0{,}5=0{,}5$;

$P(Y=2)=0{,}5\cdot 0{,}5=0{,}25$.

Bảng phân bố xác suất của X là:

X	0	1	2
P	0,36	0,48	0,16

Bảng phân bố xác suất của Y là:

Y	0	1	2
P	0,25	0,5	0,25

b) $E(X)=1\cdot 0{,}48+2\cdot 0{,}16=0{,}8$;

$V(X)=1\cdot 0{,}48+4\cdot 0{,}16-0{,}64=0{,}48$;

$E(Y)=1\cdot 0{,}5+2\cdot 0{,}25=1$;

$V(Y)=1\cdot 0{,}5+4\cdot 0{,}25-1=0{,}5$.

1.5. Kí hiệu A_{ij} là biến cố: "Chọn được quả cầu ghi số i và quả cầu ghi số j".

$$P(X=2)=P(A_{11})=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{6}{45}.$$

$$P(X=3)=P(A_{12})=\frac{C_4^1C_3^1}{C_{10}^2}=\frac{12}{45}.$$

$$P(X=4)=P(A_{13})+P(A_{22})=\frac{C_4^1C_2^1}{C_{10}^2}+\frac{C_3^2}{C_{10}^2}=\frac{11}{45}.$$

$$P(X=5)=P(A_{14})+P(A_{23})=\frac{C_4^1C_1^1}{C_{10}^2}+\frac{C_3^1C_2^1}{C_{10}^2}=\frac{10}{45}.$$

$$P(X=6)=P(A_{33})+P(A_{24})=\frac{C_2^2}{C_{10}^2}+\frac{C_3^1C_1^1}{C_{10}^2}=\frac{4}{45}.$$

$$P(X=7)=P(A_{34})=\frac{C_2^1C_1^1}{C_{10}^2}=\frac{2}{45}.$$

Vậy bảng phân bố xác suất của X là:

X	2	3	4	5	6	7
P	$\frac{6}{45}$	$\frac{12}{45}$	$\frac{11}{45}$	$\frac{10}{45}$	$\frac{4}{45}$	$\frac{2}{45}$

Bài 2. BIẾN NGẪU NHIÊN CÓ PHÂN BỐ NHỊ THỨC VÀ ÁP DỤNG (5 tiết)

I MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

Học xong bài này, HS cần đạt được các yêu cầu sau:

– Nhận biết khái niệm phép thử lặp.

– Nhận biết công thức Bernoulli.

– Vận dụng công thức Bernoulli trong một số tình huống đơn giản.

– Nhận biết khái niệm biến ngẫu nhiên có phân bố nhị thức với tham số (n, p).

– Nắm được và vận dụng công thức tính $P(X \le k)$, $P(X \ge k)$ với X là biến ngẫu nhiên có phân bố nhị thức.

– Vận dụng phân bố nhị thức để giải quyết một số bài toán có nội dung thực tiễn.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Năng lực tư duy và lập luận toán học.
- Năng lực giao tiếp toán học.
- Năng lực mô hình hoá toán học.
- Năng lực giải quyết vấn đề toán học thông qua các bài toán thực tiễn.

II NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Cố gắng kết nối bài học trong sách với cuộc sống thực đang diễn ra.
- Phát huy tính tích cực của HS, khắc phục nhược điểm của phương pháp truyền thụ một chiều.
- Tăng cường các hoạt động và luyện tập trên lớp, tăng cường sự tương tác hai chiều giữa GV và HS.
- Sau khi kiến thức mới được hình thành và đóng khung trong hộp kiến thức, sẽ có ví dụ minh hoạ. Ví dụ đóng vai trò làm mẫu cho Luyện tập tiếp nối ngay theo ví dụ đó.
- Các Hoạt động, Luyện tập được thực hiện ngay tại lớp. GV cho HS suy nghĩ 5 – 10 phút rồi hỏi xem HS trả lời. Nếu không có HS nào xung phong thì GV chỉ định một HS trả lời. GV sẽ thực hiện việc chữa bài Hoạt động, Luyện tập đó như sau: Nếu HS làm đúng thì GV sẽ trình bày lại lời giải của HS đó cho rõ ràng và mạch lạc, nếu HS đó làm sai thì GV sẽ phân tích xem sai ở đâu. Trong mọi trường hợp việc chữa bài Luyện tập đều rất có ích cho việc củng cố kiến thức mới.

III GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

- Dự kiến phân bổ thời gian: 5 tiết với hai mục sau:

1. Phép thử lặp và công thức Bernoulli	2 tiết
2. Biến ngẫu nhiên có phân bố nhị thức và áp dụng	3 tiết

- Kết thúc mỗi nội dung, GV lựa chọn các câu hỏi phù hợp trong phần bài tập cuối bài học để HS thực hành và củng cố kiến thức.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
1. PHÉP THỬ LẶP VÀ CÔNG THỨC BERNOULLI		
Tình huống mở đầu	Giúp HS có hứng thú và gợi động cơ với nội dung bài học.	GV chỉ cần nêu tình huống để kích thích nhu cầu học tập của HS, chưa yêu cầu HS giải quyết ngay. Khi HS tiếp thu đủ lượng tri thức toán học cần thiết trong bài thì sẽ quay lại giải quyết.
HĐ1	Khởi động cho việc hình thành kiến thức mới.	HS tự làm (trong 5 phút), sau đó GV gọi HS lên bảng trình bày. *Trả lời:* a) Phép thử T được lặp lại 12 lần. Người chơi thắng khi biến cố E xuất hiện ít nhất hai lần. b) Phép thử T được lặp lại 6 lần. Người chơi thắng khi biến cố E xuất hiện ít nhất một lần.
Khung kiến thức	Trình bày khái niệm phép thử lặp và công thức Bernoulli.	GV triển khai theo SCĐ.
Ví dụ 1	Minh hoạ cho kiến thức mới.	GV triển khai theo SCĐ.
Luyện tập 1	Luyện tập vận dụng kiến thức mới. Ví dụ 1 đóng vai trò làm mẫu.	GV cho cả lớp suy nghĩ trong thời gian 10 phút rồi gọi một em trả lời. *Giải.* Gọi A là biến cố: "An thắng trong một ván đấu". Ta có $P(A) = 0,4$; $n = 3$. Gọi E_k là biến cố: "A thắng đúng k ván". Gọi M là biến cố: "An thắng trong trận đấu". Khi đó M là biến cố: "An thắng ít nhất 2 ván". $M = E_2 \cup E_3$ $\Rightarrow P(M) = P(E_2) + P(E_3)$ $= C_3^2 \cdot 0,4^2 \cdot 0,6 + C_3^3 \cdot 0,4^3 = 0,352.$
Ví dụ 2	Giải quyết tình huống mở đầu.	GV triển khai theo SCĐ.

<table>
<tr><td>Luyện tập 2</td><td>Tiếp tục tình huống mở đầu. Ví dụ 2 đóng vai trò làm mẫu.</td><td>GV cho cả lớp suy nghĩ trong thời gian 10 phút rồi gọi một em trả lời.
Giải. a) Gọi T là phép thử: “Gieo một con xúc xắc cân đối, đồng chất”. E là biến cố: “Xuất hiện mặt 6 chấm”.
Xét phép thử lặp T với $n = 6$ và $p = P(E) = \frac{1}{6}$.
Gọi A là biến cố: “Người chơi thắng”. Khi đó A là biến cố: “Trong phép thử lặp này biến cố E xuất hiện ít nhất một lần”.
Xét biến cố đối $\overline{A}$: “Trong phép thử lặp T này biến cố E không xuất hiện lần nào”.
Ta có $\overline{A} = E_0$. Theo công thức Bernoulli:
$P(E_0) = C_6^0 p^0 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^6 = \left(\frac{5}{6}\right)^6$.
Vậy $P(A) = 1 - P(E_0)$
$= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 = \frac{6^6 - 5^6}{6^6} = 0{,}665102...$
Vậy xác suất thắng của người chơi khi chơi theo phương án 2 là 0,665102...
b) Theo Ví dụ 2, xác suất thắng của người chơi khi chơi theo phương án 1 là 0,618667... Vậy xác suất thắng của người chơi khi chơi theo phương án 1 nhỏ hơn xác suất thắng của người chơi khi chơi theo phương án 2. Vậy người chơi nên chọn phương án 2.</td></tr>
<tr><td colspan="3">2. BIẾN NGẪU NHIÊN CÓ PHÂN BỐ NHỊ THỨC VÀ ÁP DỤNG</td></tr>
<tr><td>Tình huống mở đầu</td><td>Giới thiệu một tình huống xuất hiện biến ngẫu nhiên có phân bố nhị thức.</td><td>GV chỉ cần nêu tình huống để kích thích nhu cầu học tập của HS, chưa yêu cầu HS giải quyết ngay. Khi HS tiếp thu đủ lượng tri thức toán học cần thiết trong bài thì sẽ quay lại giải quyết.</td></tr>
<tr><td>HĐ2</td><td>Khởi động cho việc hình thành khái niệm biến ngẫu nhiên có</td><td>GV cho cả lớp suy nghĩ trong thời gian tối đa 5 phút rồi gọi một em trả lời.
Trả lời: Biến cố $\{X = k\}$ là biến cố: “Trong n lần thực hiện lặp lại phép thử T”, biến cố E: “Xuất hiện đúng</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>phân bố nhị thức.</td><td>k lần". Vậy $P(X = k)$ là xác suất để trong n lần thực hiện lặp lại phép thử T, biến cố E xuất hiện đúng k lần. Vậy theo công thức Bernoulli ta có
$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.</td></tr>
<tr><td>Khung kiến thức</td><td>Trình bày khái niệm biến ngẫu nhiên có phân bố nhị thức và trường hợp đặc biệt là biến ngẫu nhiên có phân bố Bernoulli.</td><td>GV triển khai theo SCĐ.</td></tr>
<tr><td></td><td>Củng cố khái niệm biến ngẫu nhiên có phân bố Bernoulli.</td><td>Bảng phân bố của biến ngẫu nhiên $X \sim \text{Ber}(p)$.<table><tr><td>X</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>P</td><td>$1-p$</td><td>p</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Nhận xét</td><td>Trình bày một dấu hiệu nhận biết biến ngẫu nhiên có phân bố nhị thức.</td><td>GV triển khai theo SCĐ.</td></tr>
<tr><td>Chú ý về phân bố nhị thức</td><td>Phát biểu một công thức sẽ được sử dụng trong bài học và bài tập.</td><td>GV triển khai theo SCĐ.</td></tr>
<tr><td>Ví dụ 3</td><td>Minh hoạ việc áp dụng phân bố nhị thức và chú ý về phân bố nhị thức.</td><td>GV triển khai theo SCĐ.</td></tr>
<tr><td>Luyện tập 3</td><td>Củng cố việc áp dụng phân bố</td><td>GV cho cả lớp suy nghĩ trong thời gian 10 phút rồi gọi một em trả lời.</td></tr>
</table>

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

	nhị thức và chú ý về phân bố nhị thức. Ví dụ 3 đóng vai trò làm mẫu.	*Giải.* Người chơi được ít nhất 30 điểm khi con xúc xắc có ít nhất 3 lần mà số chấm xuất hiện lớn hơn 4. Phép thử T là gieo con xúc xắc, E là biến cố: "Con xúc xắc có số chấm xuất hiện lớn hơn 4". Ta có $P(E) = \frac{1}{3}$. T được lặp lại 5 lần một cách độc lập. X là biến ngẫu nhiên: "Con xúc xắc có số chấm xuất hiện lớn hơn 4". Ta có $X \sim B\left(5, \frac{1}{3}\right)$. Người chơi được ít nhất 30 điểm khi $X \geq 3$. Theo chú ý về phân bố nhị thức ta có $P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$ $= C_5^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2 + C_5^4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^1 + C_5^5\left(\frac{1}{3}\right)^5 \approx 0{,}21.$
Vận dụng	Áp dụng chú ý về phân bố nhị thức và công thức tính kì vọng của biến ngẫu nhiên có phân bố nhị thức để giải quyết tình huống mở đầu.	GV cho cả lớp suy nghĩ trong thời gian 10 phút rồi gọi một em trả lời. *Giải.* Gọi X là số câu trả lời đúng của An. X là biến ngẫu nhiên có phân bố nhị thức với tham số $n = 10$, $p = 0{,}25$. Số điểm trung bình là $E(X)$. Vậy về trung bình An nhận được là $E(X) = np = 10 \cdot 0{,}25 = 2{,}5$ (điểm). b) An vượt qua bài thi khi làm đúng ít nhất 5 câu, tức là khi $X \geq 5$. Theo chú ý về phân bố nhị thức ta có: $P(X \geq 5)$ $= C_{10}^5\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^5 + C_{10}^6\left(\frac{1}{4}\right)^6\left(\frac{3}{4}\right)^4 + \cdots + C_{10}^{10}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}$ $\approx 0{,}0781.$

3. Lựa chọn bài tập

GV lưu ý lựa chọn các câu hỏi trong phần bài tập cuối bài học sao cho phù hợp với tiến trình dạy học.

IV ĐÁP SỐ/HƯỚNG DẪN/LỜI GIẢI BÀI TẬP

1.6. Gọi A là biến cố: "Hộp không bị loại khi kiểm tra".

Ta có phép thử lặp với $n = 10$ và $p = 0{,}01$.

$A = E_0 \cup E_1 \Rightarrow P(A) = P(E_0 \cup E_1) = P(E_0) + P(E_1)$

$= C_{10}^0 \cdot 0{,}01^0 \cdot 0{,}99^{10} + C_{10}^1 \cdot 0{,}01^1 \cdot 0{,}99^9$

$= 0{,}99^{10} + 10 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99^9 \approx 0{,}996.$

Vậy tỉ lệ những hộp linh kiện điện tử loại I là khoảng 99,6%.

1.7. a) Gọi x là số câu trả lời đúng, $10 - x$ là số câu trả lời sai. Thí sinh được $4x - (10 - x) = 5x - 10$ điểm. Ta có $5x - 10 = 15$. Vậy $x = 5$, tức là thí sinh được 15 điểm nếu trả lời đúng 5 câu.

Gọi A là biến cố: "Thí sinh được 15 điểm". Ta có một phép thử lặp với $n = 10$ và $p = 0{,}25$.

Ta có $P(A) = P(E_5) = C_{10}^5 \cdot 0{,}25^5 \cdot 0{,}75^5 \approx 0{,}0584.$

Thí sinh được điểm âm khi $5x - 10 < 0$ hay $x < 2$, tức là thí sinh được điểm âm nếu trả lời đúng nhiều nhất 1 câu. Gọi B là biến cố: "Thí sinh được điểm âm". Ta có:

$B = E_0 \cup E_1 \Rightarrow P(B) = P(E_0 \cup E_1) = P(E_0) + P(E_1)$

$= C_{10}^0 \cdot 0{,}25^0 \cdot 0{,}75^{10} + C_{10}^1 \cdot 0{,}25^1 \cdot 0{,}75^9 \approx 0{,}244.$

1.8. Đầu tiên tính xác suất để người chơi thắng trong một ván. Gọi A là biến cố: "Người chơi thắng". Ta có một phép thử lặp với $n = 3$ và $p = \frac{1}{6}$.

$A = E_2 \cup E_3$

$\Rightarrow P(A) = P(E_2 \cup E_3) = P(E_2) + P(E_3) = C_3^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^1 + C_3^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{16}{216} = \frac{2}{27}.$

Gọi B là biến cố: "Bác Hưng thắng". Ta có một phép thử lặp với $n = 3$ và $p = \frac{2}{27}$.

$P(B) = E_2 \cup E$

$\Rightarrow P(B) = P(E_2 \cup E_3) = P(E_2) + P(E_3) = C_3^2 \left(\frac{2}{27}\right)^2 \left(\frac{25}{27}\right)^1 + C_3^3 \left(\frac{2}{27}\right)^3$

$= \frac{308}{19\,683} \approx 0{,}016.$

1.9. Phép thử T là lai hai cây đậu Hà Lan. Có 4 kết quả có thể đồng khả năng về kiểu gene của cây con là {AA; Aa; aA; aa}, trong đó 3 kiểu gene {AA; Aa; aA} có kiểu hình

là hạt màu vàng. Ta có phép thử lặp với $n = 4, p = \frac{3}{4}$. Vậy $X \sim B\left(4, \frac{3}{4}\right)$.

$$P(X=0) = C_4^0\left(\frac{3}{4}\right)^0\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}; P(X=1) = C_4^1\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{12}{256};$$

$$P(X=2) = C_4^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{54}{256}; P(X=3) = C_4^3\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{108}{256};$$

$$P(X=4) = C_4^4\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^0 = \frac{81}{256}.$$

a) Bảng phân bố xác suất của X là:

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{256}$	$\frac{12}{256}$	$\frac{54}{256}$	$\frac{108}{256}$	$\frac{81}{256}$

b) Ta có $E(X) = np = 4 \cdot \frac{3}{4} = 3$. Vậy trung bình có 3 cây con có hạt màu vàng.

Do đó trung bình có 4 – 3 = 1 cây con có hạt màu xanh.

1.10. a) X là biến ngẫu nhiên có phân bố nhị thức với tham số $n = 6; p = 0{,}25$.

b) Lớp học đủ ánh sáng khi và chỉ khi $X \geq 4$. Theo chú ý về phân bố nhị thức ta có

$P(X \geq 4) = P(X=4) + P(X=5) + P(X=6)$

$= C_6^4 \cdot 0{,}75^4 \cdot 0{,}25^2 + C_6^5 \cdot 0{,}75^5 \cdot 0{,}25 + 0{,}75^6 \approx 0{,}8306.$

Vậy xác suất để lớp học đủ ánh sáng khoảng 0,8306.

c) $E(X) = 1{,}5$; $V(X) = 1{,}125$; $\sigma(X) = \sqrt{1{,}125} \approx 1{,}06$.

1.11. a) X là biến ngẫu nhiên có phân bố nhị thức với $n = 5; p = \frac{1}{4}$.

b) Biến cố: "Sơn thắng Tùng trong trận đấu" là biến cố $\{X \geq 3\}$. Vậy xác suất để Sơn thắng Tùng trong trận đấu là $P(X \geq 3)$. Theo chú ý về phân bố nhị thức ta có:

$$P(X \geq 3) = C_5^3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2 + C_5^4\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^1 + C_5^5\left(\frac{1}{4}\right)^5$$

$$= 10 \cdot \frac{9}{1024} + 5 \cdot \frac{3}{1024} + \frac{1}{1024} = \frac{106}{1024} \approx 0{,}1035.$$

1.12. a) Gọi X là số quả cam không đạt chất lượng trong 20 lần chọn đó.

X là biến ngẫu nhiên có phân bố nhị thức với $n = 20$, $p = 0{,}03$.

b) Gọi A là biến cố: "Thùng cam được xếp loại I".

$P(A) = P(X = 0) = C_{20}^{0} \cdot 0{,}03^{0} \cdot 0{,}97^{20} = 0{,}97^{20} \approx 0{,}5438$.

Gọi B là biến cố: "Thùng cam được xếp loại II". Ta có $B = \{X = 1\} \cup \{X = 2\}$

$\Rightarrow P(B) = P(X = 1) + P(X = 2)$

$= C_{20}^{1} \cdot 0{,}03^{1} \cdot 0{,}97^{19} + C_{20}^{2} \cdot 0{,}03^{2} \cdot 0{,}97^{18}$

$= 20 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}97^{19} + 190 \cdot 0{,}03^{2} \cdot 0{,}97^{18} \approx 0{,}4352.$

Gọi C là biến cố: "Thùng cam được xếp loại III". C là biến cố: "Có ít nhất 3 quả cam không đạt chất lượng". Ta có $C = \{X \geq 3\}$. Xét biến cố đối $\overline{C} = \{X \leq 2\}$. Theo chú ý về phân bố nhị thức ta có:

$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$;

$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2)$.

Theo trên ta có $P(X = 0) = P(A)$, $P(X = 1) + P(X = 2) = P(B)$.

Vậy $P(C) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - 0{,}5438 - 0{,}4352 = 0{,}021$.

Vậy tỉ lệ các thùng cam được xếp loại I, II, III tương ứng là 54,38%; 43,52% và 2,1%.

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

BÀI TẬP CUỐI CHUYÊN ĐỀ 1 (2 tiết)

I TỔNG KẾT KIẾN THỨC

- Đại lượng X được gọi là một biến ngẫu nhiên rời rạc nếu nó nhận một số hữu hạn các giá trị có thể. Các giá trị đó là các số và không dự đoán được trước khi phép thử được thực hiện.
- Giả sử X là một biến ngẫu nhiên rời rạc nhận các giá trị $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ với các xác suất tương ứng là $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n$ tức là $P(X = x_i) = p_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.
- Bảng sau đây

X	x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n
P	p_1	p_2	...	p_{n-1}	p_n

được gọi là bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc X.

– Kì vọng của X, kí hiệu là $E(X)$, là một số được tính theo công thức sau:

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_{n-1}p_{n-1} + x_np_n.$$

– Phương sai của X, kí hiệu là $V(X)$, là một số được tính theo công thức sau:

$$V(X) = (x_1 - \mu)^2 p_1 + (x_2 - \mu)^2 p_2 + \cdots + (x_{n-1} - \mu)^2 p_{n-1} + (x_n - \mu)^2 p_n \quad (1)$$

hoặc $V(X) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + \cdots + x_{n-1}^2p_{n-1} + x_n^2p_n - \mu^2$, trong đó $\mu = E(X)$.

– Độ lệch chuẩn của X, kí hiệu là $\sigma(X)$, là căn bậc hai của phương sai:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

– Xét phép thử T và E là một biến cố liên quan tới phép thử T. Ở mỗi lần thực hiện phép thử T, biến cố E có xác suất xuất hiện bằng p, $P(E) = p$.

Ta thực hiện phép thử T lặp lại n lần một cách độc lập. Kí hiệu E_k là biến cố: "Trong n phép thử lặp này, biến cố E xuất hiện đúng k lần ($0 \le k \le n$). Khi đó:

$$P(E_k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Công thức trên được gọi là công thức Bernoulli.

– Biến ngẫu nhiên rời rạc X với tập các giá trị có thể là $\{0; 1; 2; ...; n\}$ và có bảng phân bố xác suất:

X	0	1	...	k	...	n
P	$(1-p)^n$	$C_n^1 p(1-p)^{n-1}$	...	$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	...	p^n

được gọi là biến ngẫu nhiên có phân bố nhị thức với tham số (n, p) và kí hiệu là $X \sim B(n, p)$.

– Biến ngẫu nhiên X có phân bố nhị thức với tham số $(1, p)$ được gọi là biến ngẫu nhiên có phân bố Bernoulli, kí hiệu là $X \sim \text{Ber}(p)$.

– Cho X là biến ngẫu nhiên $X \sim B(n, p)$. Khi đó, với mỗi số nguyên dương k $(1 \le k \le n)$ ta có

a) $P(X \le k) = C_n^0 (1-p)^n + C_n^1 p(1-p)^{n-1} + \cdots + C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

b) $P(X \ge k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} + C_n^{k+1} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1} + \cdots + C_n^n p^n$.

II ĐÁP SỐ/HƯỚNG DẪN/LỜI GIẢI BÀI TẬP

1.13. X nhận các giá trị $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Kết quả của ba lần rút thẻ là $(a; b; c)$ trong đó a, $b, c \in \{0; 1; 2\}$. Vậy số kết quả có thể của ba lần rút thẻ là 27.

Kết quả thuận lợi cho biến cố $\{X = 0\}$ là $(0; 0; 0)$. Do đó $P(X = 0) = \frac{1}{27}$.

Kết quả thuận lợi cho biến cố $\{X = 1\}$ là $(0; 0; 1)$; $(1; 0; 0)$ và $(0; 1; 0)$.

Vậy $P(X = 1) = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$.

Kết quả thuận lợi cho biến cố $\{X = 2\}$ là $(0; 0; 2)$; $(2; 0; 0)$; $(0; 2; 0)$; $(1; 1; 0)$; $(1; 0; 1)$ và $(0; 1; 1)$. Vậy $P(X = 2) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$.

Kết quả thuận lợi cho biến cố $\{X = 3\}$ là $(0; 1; 2)$; $(0; 2; 1)$; $(1; 0; 2)$; $(1; 2; 0)$; $(2; 0; 1)$ $(2; 1; 0)$ và $(1; 1; 1)$. Vậy $P(X = 3) = \frac{7}{27}$.

Kết quả thuận lợi cho biến cố $\{X = 4\}$ là $(2; 2; 0)$; $(0; 2; 2)$; $(2; 0; 2)$; $(1; 1; 2)$; $(1; 2; 1)$ và $(2; 1; 1)$. Vậy $P(X = 4) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$.

Kết quả thuận lợi cho biến cố $\{X = 5\}$ là $(2; 2; 1)$; $(1; 2; 2)$ và $(2; 1; 2)$.

Vậy $P(X = 5) = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$.

Kết quả thuận lợi cho biến cố $\{X = 6\}$ là $(2; 2; 2)$. Do đó $P(X = 6) = \frac{1}{27}$.

Bảng phân bố xác suất của X là:

X	0	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$

1.14. Gọi U là số bi trắng Minh rút được từ túi I. Ta có $U \sim \text{Ber}(0, 5)$.

Bảng phân bố xác suất của U là:

U	0	1
P	0,5	0,5

Ta có $P(U = 1) = 0,5$; $P(U = 0) = 0,5$.

Gọi V là số bi trắng Minh rút được từ túi II và túi III. Vì mỗi túi II và III đều chứa số viên bi trắng và số viên bi đen như nhau nên Minh đã thực hiện phép thử lặp với $n = 2, p = \frac{2}{10} = 0{,}2$. Vậy $V \sim B(2, 0{,}2)$. Từ đó ta có bảng phân bố xác suất của V là:

V	0	1	2
P	0,64	0,32	0,04

Sử dụng công thức cộng và công thức nhân xác suất ta có:

+) $P(X = 0) = P(U = 0, V = 0) = P(U = 0) \cdot P(V = 0) = 0{,}5 \cdot 0{,}64 = 0{,}32$;

+) $P(X = 1) = P(U = 1, V = 0) + P(U = 0, V = 1) = P(U = 1) \cdot P(V = 0) + P(U = 0) \cdot P(V = 1)$

$= 0{,}5 \cdot 0{,}64 + 0{,}5 \cdot 0{,}32 = 0{,}48$;

+) $P(X = 2) = P(U = 0, V = 2) + P(U = 1, V = 1) = P(U = 0) \cdot P(V = 2) + P(U = 1) \cdot P(V = 1)$

$= 0{,}5 \cdot 0{,}04 + 0{,}5 \cdot 0{,}32 = 0{,}18$;

+) $P(X = 3) = P(U = 1, V = 2) = P(U = 1) \cdot P(V = 2) = 0{,}5 \cdot 0{,}04 = 0{,}02$.

Vậy bảng phân bố xác suất của X là:

X	0	1	2	3
P	0,32	0,48	0,18	0,02

b) Chứng minh phản chứng: Giả sử $X \sim B(n, p)$. Khi đó $n = 3$.

Ta có $P(X = 3) = C_3^3 p^3 = p^3 = 0{,}02$. (1)

$P(X = 2) = C_3^2 p^2 (1 - p) = 3p^2 - 3p^3 = 0{,}18$

$\Rightarrow 3p^2 = 3p^3 + 0{,}18 = 3 \cdot 0{,}02 + 0{,}18 = 0{,}24 \Rightarrow p^2 = 0{,}08.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $p = \frac{0{,}02}{0{,}08} = 0{,}25 \Rightarrow p^2 = 0{,}0625$. Mâu thuẫn với (2).

Vậy X không phải là biến ngẫu nhiên có phân bố nhị thức.

1.15. *) Nếu ở vòng 1 An bốc ngẫu nhiên câu hỏi loại 1.

i) Nếu trả lời sai thì An được 0 điểm. Cuộc thi kết thúc tại đây.

Vậy $P(X_1 = 0) = P(\overline{E_1}) = 1 - p_1$.

ii) Nếu trả lời đúng thì An nhận V_1 điểm và An được đi tiếp vòng 2: Bốc ngẫu nhiên một câu hỏi loại 2.

Gọi E_1 là biến cố: "Trả lời đúng câu hỏi loại 1"; E_2 là biến cố: "Trả lời đúng câu hỏi loại 2".

Nếu trả lời sai câu hỏi loại 2 này thì An nhận 0 điểm. Cuộc thi kết thúc tại đây và An được $V_1 + 0 = V_1$ điểm.

Theo giả thiết $E_1, \overline{E_2}$ là hai biến cố độc lập.

Theo công thức nhân xác suất cho hai biến cố độc lập ta có:

$$P(X_1 = V_1) = P\left(E_1\overline{E_2}\right) = P(E_1)P\left(\overline{E_2}\right) = p_1(1-p_2).$$

Nếu trả lời đúng câu hỏi loại 2 này thì An nhận V_2 điểm. Cuộc thi kết thúc tại đây và An được $V_1 + V_2$ điểm.

Theo giả thiết E_1, E_2 là hai biến cố độc lập.

Theo công thức nhân xác suất cho hai biến cố độc lập ta có:

$$P(X_1 = V_1 + V_2) = P(E_1E_2) = P(E_1)P(E_2) = p_1p_2.$$

Vậy bảng phân bố xác suất của X_1 là:

X_1	0	V_1	$V_1 + V_2$
P	$1 - p_1$	$p_1(1-p_2)$	p_1p_2

$$E(X_1) = V_1p_1(1-p_2) + (V_1 + V_2)p_1p_2.$$

*) Nếu ở vòng 1, An bốc ngẫu nhiên câu hỏi loại 2.

Lập luận tương tự như trên ta có bảng phân bố xác suất của X_2 là:

X_2	0	V_2	$V_1 + V_2$
P	$1 - p_2$	$p_2(1-p_1)$	p_1p_2

$$E(X_2) = V_2p_2(1-p_1) + (V_1 + V_2)p_1p_2.$$

a) Ở vòng 1 An nên chọn câu hỏi loại 1 trước nếu

$E(X_1) \geq E(X_2) \Leftrightarrow V_1p_1(1-p_2) \geq V_2p_2(1-p_1)$ tức là nếu $\dfrac{V_1p_1}{1-p_1} \geq \dfrac{V_2p_2}{1-p_2}$.

b) Ta có $\dfrac{V_1p_1}{1-p_1} = \dfrac{20 \cdot 0{,}6}{1-0{,}6} = 30 < \dfrac{V_2p_2}{1-p_2} = \dfrac{10 \cdot 0{,}8}{1-0{,}8} = 40.$

Vậy ở vòng 1 An nên chọn câu hỏi loại 2 trước.

1.16. Gọi X là số ván thắng của Trường. Biến cố: "Trường thắng cuộc" là biến cố $\{X \geq 4\}$.

Theo chú ý về phân bố nhị thức ta có:

$$P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7)$$

$$= C_7^4 \cdot 0,4^4 \cdot 0,6^3 + C_7^5 \cdot 0,4^5 \cdot 0,6^2 + C_7^6 \cdot 0,4^6 \cdot 0,6 + 0,4^7 \approx 0,29.$$

1.17. Với hệ 5 thành phần: Gọi X là số thành phần hoạt động. Ta có $X \sim B(5, p)$. Hệ hoạt động nếu $X \geq 3$. Theo chú ý về phân bố nhị thức, xác suất để hệ thống hoạt động là:

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = C_5^3 p^3 (1-p)^2 + C_5^4 p^4 (1-p) + p^5.$$

Với hệ 3 thành phần: Gọi Y là số thành phần hoạt động. Ta có $Y \sim B(3, p)$. Hệ hoạt động nếu $Y \geq 2$. Theo chú ý về phân bố nhị thức, xác suất để hệ thống hoạt động là:

$$P(Y \geq 2) = P(Y = 2) + P(Y = 3) = C_3^2 p^2 (1-p) + p^3.$$

Hệ 5 thành phần tốt hơn hệ 3 thành phần khi và chỉ khi

$$C_5^3 p^3 (1-p)^2 + C_5^4 p^4 (1-p) + p^5 > C_3^2 p^2 (1-p) + p^3$$

$$\Leftrightarrow 2p^2 - 3p + 1 < 0 \Rightarrow p > \frac{1}{2}.$$

1.18. a) Mỗi ngày cửa hàng phải bỏ ra chi phí là $3a$ triệu đồng. Giả sử mỗi người đến thuê một chiếc xe.

Cửa hàng không có ai thuê với xác suất là 0,0608. Khi đó cửa hàng phải trả số tiền là $3a$ triệu đồng.

Vậy $P(Y = -3a) = 0,0608$.

Cửa hàng có một người thuê với xác suất là 0,1703. Khi đó cửa hàng thu được số tiền là $1 - 3a$ triệu đồng.

Vậy $P(Y = 1 - 3a) = 0,1703$.

Cửa hàng có hai người thuê với xác suất là 0,2384. Khi đó cửa hàng thu được số tiền là $2 - 3a$ triệu đồng.

Cửa hàng có từ 3 hoặc 4 người đến thuê với xác suất là: 0,2225 + 0,308 = 0,5305.

Tuy nhiên cửa hàng chỉ có 3 chiếc xe cho thuê nên số tiền cửa hàng thu được $3 - 3a$ triệu đồng.

Bảng phân bố xác suất của Y là:

Y	$-3a$	$1-3a$	$2-3a$	$3-3a$
P	0,0608	0,1703	0,2384	0,5305

Số tiền trung bình cửa hàng thu được là:

$E(Y) = 0{,}0608 \cdot (-3a) + 0{,}1703 \cdot (1-3a) + 0{,}2384 \cdot (2-3a) + 0{,}5305 \cdot (3-3a)$

$= -3a(0{,}0608 + 0{,}1703 + 0{,}2384 + 0{,}5305) + 0{,}1703 + 2 \cdot 0{,}2384 + 3 \cdot 0{,}5305$

$= -3a + 2{,}2386 = 2{,}2386 - 3a$ (triệu đồng).

b) Mỗi ngày cửa hàng phải bỏ ra chi phí là $4a$ triệu đồng.

Cửa hàng không có ai thuê với xác suất là 0,0608. Khi đó cửa hàng phải trả $-4a$ triệu đồng. Vậy $P(Z = -4a) = 0{,}0608$.

Cửa hàng có một người thuê với xác suất là 0,1703. Khi đó cửa hàng thu được $1-4a$ triệu đồng. Vậy $P(Z = 1-4a) = 0{,}1703$.

Cửa hàng có hai người thuê với xác suất là 0,2384. Khi đó cửa hàng thu được $2-4a$ triệu đồng. Vậy $P(Z = 2-4a) = 0{,}2384$.

Cửa hàng có ba người thuê với xác suất là 0,2225. Khi đó cửa hàng thu được $3-4a$ triệu đồng. Vậy $P(Z = 3-4a) = 0{,}2225$.

Cửa hàng có bốn người đến thuê với xác suất là 0,308. Khi đó cửa hàng thu được $4-4a$ triệu đồng. Vậy $P(Z = 4-4a) = 0{,}308$

Bảng phân bố xác suất của Z là:

Z	$-4a$	$1-4a$	$2-4a$	$3-4a$	$4-4a$
P	0,0608	0,1703	0,2384	0,2225	0,308

Số tiền trung bình cửa hàng thu được là:

$E(Z)$

$= 0{,}0608 \cdot (-4a) + 0{,}1703 \cdot (1-4a) + 0{,}2384 \cdot (2-4a) + 0{,}2225 \cdot (3-4a) + 0{,}308 \cdot (4-4a)$

$= -4a + 1 \cdot 0{,}1703 + 2 \cdot 0{,}2384 + 3 \cdot 0{,}2225 + 4 \cdot 0{,}308$

$= -4a + 2{,}5466 = 2{,}5466 - 4a$ (triệu đồng).

c) Cửa hàng chỉ nên duy trì 3 xe cho thuê nếu $E(Y) > E(Z)$

$\Rightarrow 2{,}2386 - 3a > 2{,}5466 - 4a \Rightarrow a > 2{,}5466 - 2{,}2386 = 0{,}308.$

CHUYÊN ĐỀ 2. ỨNG DỤNG TOÁN HỌC ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ BÀI TOÁN TỐI ƯU

A TỔNG QUAN

1 Vị trí, vai trò của chuyên đề

- Chuyên đề 2 giới thiệu phương pháp hình học để giải một số bài toán quy hoạch tuyến tính hai biến và phương pháp đạo hàm để giải quyết một số bài toán tối ưu đơn giản trong thực tiễn. Có thể coi nội dung của Chuyên đề 2 là những phát triển một cách hệ thống và sâu sắc hơn những nội dung tương ứng đã học ở SGK Toán 10 (phần Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn) và SGK Toán 12 (phần Ứng dụng của đạo hàm).
- Các ví dụ, bài tập của chuyên đề này được lấy từ chính những tình huống trong thực tế hoặc rất gần gũi với thực tế cuộc sống, nhằm trang bị cho HS những kiến thức, kĩ năng cần thiết để có thể giải quyết những bài toán tối ưu hoá đơn giản thường gặp trong đời sống. Cơ sở toán học của những phương pháp toán học trình bày trong chuyên đề này là cách biểu diễn hình học tập nghiệm của một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên mặt phẳng toạ độ và ứng dụng của đạo hàm trong việc xét chiều biến thiên, tìm cực trị, giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số.

2 Cấu tạo chuyên đề

Chuyên đề này gồm 2 bài học và 2 tiết ôn tập chuyên đề, được thực hiện trong 12 tiết. Cụ thể như sau:

Bài 3. Vận dụng hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn để giải quyết một số bài toán quy hoạch tuyến tính	5 tiết
Bài 4. Vận dụng đạo hàm để giải quyết một số bài toán tối ưu	5 tiết
Bài tập cuối chuyên đề 2	2 tiết

3 Một số điểm cần lưu ý

- Mặc dù cùng tiếp cận vấn đề bằng phương pháp hình học, nhưng mức độ của các ví dụ, bài tập ở Bài 3 của Chuyên đề 2 trong Chuyên đề học tập Toán 12 cao hơn nhiều so với mức độ yêu cầu ở các bài tập ứng dụng trong phần Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn mà HS đã học ở SGK Toán 10. Nói riêng, ngoài việc gọi tên chính thức bài toán quy hoạch tuyến tính và đề cập đến các khái niệm cơ bản của bài toán như hàm mục tiêu, phương án chấp nhận được, phương án tối ưu, điểm cực biên,...,

ở đây xét cả tình huống miền chấp nhận được (tức là miền nghiệm của hệ bất phương trình ràng buộc) là miền không bị chặn; khi đó bài toán quy hoạch tuyến tính đang xét có thể không có nghiệm.

Tuy nhiên, để tránh nặng nề cho HS, các kiến thức và cơ sở toán học cần thiết để giải (nếu bài toán có phương án tối ưu thì phương án tối ưu là một trong các phương án cực biên, tức là hàm mục tiêu sẽ đạt được giá trị tối ưu tại một trong các "đỉnh" của miền chấp nhận được) được đưa trong phần nhận xét, chứ không trình bày thành Khung kiến thức và không yêu cầu chứng minh chặt chẽ. HS chỉ cần biết vận dụng các kết quả tổng quát này trong thực hành.

– Nội dung Bài 4 của Chuyên đề 2 sử dụng những kiến thức tương ứng trình bày trong Chương I SGK Toán 12 như dùng đạo hàm xét chiều biến thiên, tìm cực trị, giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số. Do đó cần giảng dạy sau khi HS được học những kiến thức đó trong SGK Toán 12.

Nội dung của Chuyên đề 2 gắn với nhiều ứng dụng phong phú trong thực tiễn nên trong quá trình giảng dạy, khi có thể GV nên tìm cách liên hệ với thực tiễn để làm cho bài học trở nên sinh động hơn và làm cho HS thấy nội dung chuyên đề gần gũi, thiết thực với cuộc sống. Một lưu ý nữa khi giảng dạy là GV cần bám sát nội dung và yêu cầu cần đạt của chuyên đề này được quy định trong Chương trình, mà đã được cụ thể hoá trong sách Chuyên đề học tập Toán 12, để không bị vượt quá yêu cầu cần đạt của Chương trình.

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

B GIỚI THIỆU CHI TIẾT CÁC BÀI HỌC

Bài 3. VẬN DỤNG HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH (5 tiết)

I MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

– Phát biểu được bài toán quy hoạch tuyến tính hai biến. Nhận biết được các ràng buộc, hàm mục tiêu.

– Biểu diễn được miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn và tìm được các phương án cực biên.

- Giải thích được phương án tối ưu luôn là một trong các phương án cực biên và trong trường hợp tập các phương án chấp nhận được là miền khác rỗng và bị chặn thì bài toán quy hoạch tuyến tính luôn có phương án tối ưu.
- Nắm được các bước giải một bài toán quy hoạch tuyến tính.
- Vận dụng các kiến thức về hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn để giải quyết một số bài toán quy hoạch tuyến tính hai biến trong thực tiễn.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Rèn luyện năng lực tư duy và lập luận toán học thể hiện qua việc nhận biết miền nghiệm của bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.
- Rèn luyện năng lực mô hình hoá toán học và năng lực giao tiếp toán học thông qua việc giải quyết một số bài toán thực tiễn, bài toán quy hoạch tuyến tính.
- Bồi dưỡng hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

II NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Bài toán quy hoạch tuyến tính hai biến đã được trình bày sơ lược ở lớp 10. Ở đây trình bày chi tiết phương pháp hình học giải bài toán quy hoạch tuyến tính hai biến. Với các bài toán quy hoạch tuyến tính mà tập các phương án chấp nhận được khác rỗng và là miền đa giác thì luôn có phương án tối ưu. Ở đây xét cả các bài toán quy hoạch tuyến tính với tập các phương án chấp nhận được không là miền đa giác; bài toán không có phương án tối ưu và bài toán có vô hạn phương án tối ưu.
- Ở cấp THPT, ta chỉ trình bày cách giải bài toán quy hoạch tuyến tính hai biến bằng phương pháp hình học mà không xét đến bài toán quy hoạch tuyến tính ba biến. Phương pháp hình học chỉ hữu hiệu với các bài toán hai biến; với các bài toán quy hoạch tuyến tính có số biến lớn hơn 3 thì phương pháp hình học không còn ý nghĩa nữa. Ở đây, ta cũng không trình bày phương pháp đơn hình để giải bài toán quy hoạch tuyến tính mà chỉ trình bày phương pháp hình học, một phương pháp tiếp cận tuy có phần hạn chế nhưng có tính trực quan cao.
- Chuẩn bị:
  + GV chuẩn bị một số bài toán quy hoạch tuyến tính trong thực tiễn.
  + GV và HS chuẩn bị máy tính cầm tay để thực hành tính toán.

III GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

Dự kiến phân bổ thời gian: 5 tiết. Cụ thể như sau:

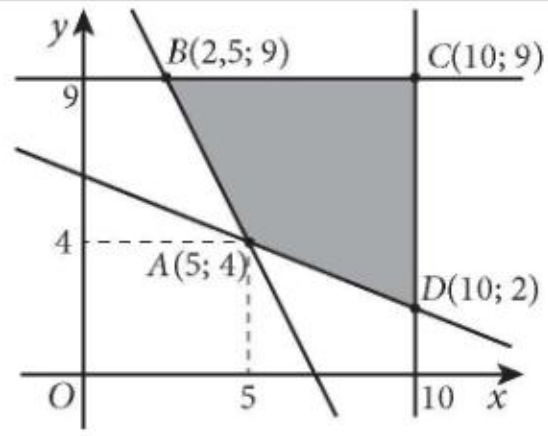
- Tiết 1: Mục 1. Giới thiệu bài toán quy hoạch tuyến tính với hai biến;
- Tiết 2: Mục 2. Bài toán quy hoạch tuyến tính với miền chấp nhận được là miền đa giác;
- Tiết 3: Mục 3. Bài toán quy hoạch tuyến tính với miền chấp nhận được không là miền đa giác;
- Tiết 4+5: Chữa bài tập.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1

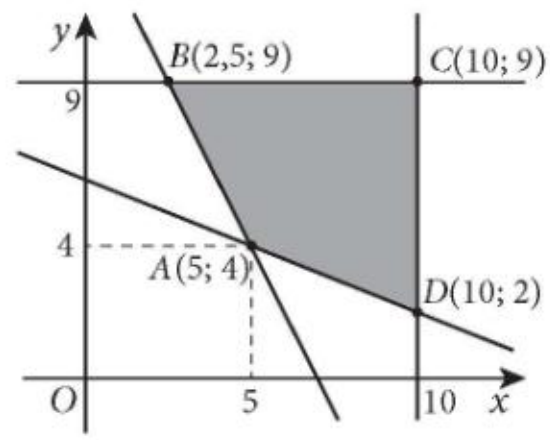
HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Tình huống mở đầu	Giúp HS có hứng thú và gợi động cơ với nội dung bài học, không yêu cầu giải quyết được ngay tình huống này. Giúp HS nhớ lại bài toán quy hoạch tuyến tính đã học ở lớp 10.	GV chỉ cần nêu tình huống để HS thấy sự xuất hiện của bài toán quy hoạch tuyến tính hai biến trong thực tiễn.
1. GIỚI THIỆU BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH HAI BIẾN		
HĐ1. Giới thiệu một bài toán quy hoạch tuyến tính trong thực tiễn	Hướng dẫn HS cách đặt ẩn, viết hàm mục tiêu và viết hệ bất phương trình các ràng buộc của bài toán, cách biểu diễn miền phương án chấp nhận được và tìm toạ độ các điểm cực biên. Từ đó gợi ý dẫn dắt HS đến bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát.	HS tự thực hiện các yêu cầu của HĐ1 dưới sự giám sát của GV. GV là người cung cấp lời giải của các phần a, b, c và d sau khi HS đã hoàn thành câu trả lời và chính xác hoá câu trả lời của HS. Sau đó GV dẫn dắt HS đến bài toán quy hoạch tuyến tính hai biến.
Hộp kiến thức	Giúp HS hiểu được phát biểu của bài toán quy hoạch tuyến tính hai biến; HS nắm được	GV cho HS tự đọc sách và giải thích các khái niệm, thuật ngữ cho HS.

	các thuật ngữ như hàm mục tiêu, ràng buộc, phương án chấp nhận được, phương án tối ưu,...	
Chú ý	Giới thiệu cách viết ngắn gọn bài toán quy hoạch tuyến tính.	GV ghi chép cẩn thận lên bảng và yêu cầu HS ghi chép vào vở ghi.
Ví dụ 1. Xét một bài toán quy hoạch tuyến tính cụ thể	Giúp HS nhận biết được một bài toán quy hoạch tuyến tính hai biến cụ thể.	GV yêu cầu HS đứng tại chỗ trả lời các câu hỏi, ghi chép cẩn thận lời giải lên bảng và yêu cầu HS ghi chép cẩn thận vào vở ghi.
Ví dụ 2. Xét một bài toán quy hoạch tuyến tính trong thực tiễn	Giúp HS rèn luyện năng lực mô hình hoá toán học thông qua một bài toán quy hoạch tuyến tính cụ thể. Hướng dẫn HS cách đặt biến, tìm hàm mục tiêu và viết các ràng buộc giữa các biến và cuối cùng là hướng dẫn HS biểu diễn miền phương án chấp nhận được và tìm các điểm cực biên.	GV cho HS đọc kĩ các yêu cầu của bài toán, trình bày cặn kẽ lời giải lên bảng và yêu cầu HS ghi chép cẩn thận vào vở ghi.
Luyện tập 1. Xét một bài toán quy hoạch tuyến tính trong thực tiễn	Cung cấp cho HS một ví dụ tương tự như Ví dụ 2 để HS thực hành.	Gọi x và y lần lượt là số tấn nguyên liệu loại I và II. Ta có hệ bất phương trình: $\begin{cases} 0 \le x \le 10, 0 \le y \le 9 \\ 20x + 10y \ge 140 \\ 0,6x + 1,5y \ge 9. \end{cases}$ Miền nghiệm của hệ bất phương trình trên là miền tứ giác $ABCD$ trong hình dưới đây:

		 Các điểm cực biên A, B, C và D được biểu diễn trên hình vẽ. Chi phí mua nguyên liệu là $F(x; y) = 4x + 3y$ (triệu đồng).

Tiết 2

2. BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH VỚI MIỀN CHẤP NHẬN ĐƯỢC LÀ MIỀN ĐA GIÁC		
HĐ2. Giải bài toán trong tình huống mở đầu	Dẫn dắt HS đến kết quả đặt trong Nhận xét sau HĐ2 và giải thích lí do tại sao trong trường hợp miền phương án chấp nhận được khác rỗng và là miền đa giác thì bài toán quy hoạch tuyến tính luôn có phương án tối ưu và phương án tối ưu rơi vào một trong các phương án cực biên. Từ đó giúp HS nắm được quy trình giải bài toán quy hoạch tuyến tính.	HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ2.
Nhận xét	Giúp HS nắm được nội dung Nhận xét.	GV gọi một HS đứng tại chỗ đọc Nhận xét sau đó viết vắn tắt lên bảng và yêu cầu HS ghi chép cẩn thận vào vở ghi.
Các bước giải bài toán quy hoạch tuyến tính	Giúp HS khắc sâu các bước giải bài toán quy hoạch tuyến tính.	GV gọi một HS đứng tại chỗ đọc các bước giải bài toán quy hoạch tuyến tính, sau đó liệt kê các bước lên bảng và yêu cầu HS ghi chép cẩn thận vào vở ghi.

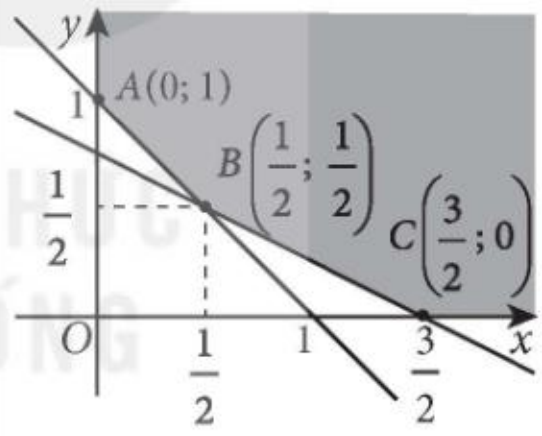
Ví dụ 3. Bài toán vitamin	Giúp HS giải bài toán quy hoạch tuyến tính hai biến mà miền nghiệm là một miền lục giác. Đây là bài toán quy hoạch tuyến tính với miền chấp nhận được bị chặn và có duy nhất một phương án tối ưu.	GV cho HS đọc kĩ các yêu cầu của bài toán và trình bày cặn kẽ lời giải lên bảng và yêu cầu HS ghi chép cẩn thận vào vở ghi.
Ví dụ 4. Bài toán doanh thu lớn nhất	Giúp HS giải bài toán quy hoạch tuyến tính hai biến mà miền nghiệm là một miền lục giác và phương án tối ưu đạt được tại mọi điểm trên một cạnh của miền nghiệm. Bài toán có vô số phương án tối ưu.	GV cho HS đọc kĩ các yêu cầu của bài toán và trình bày cặn kẽ lời giải lên bảng và yêu cầu HS ghi chép cẩn thận vào vở ghi.
Luyện tập 2. Giải một bài toán quy hoạch tuyến tính trong thực tiễn	Cung cấp cho HS một ví dụ tương tự như Ví dụ 3, nhưng đơn giản hơn để HS thực hành.	Gọi x và y lần lượt là số xe loại A và B cần thuê. Hệ bất phương trình ràng buộc giữa x và y là: $\begin{cases} 0 \le x \le 10 \\ 0 \le y \le 9 \\ 20x + 10y \ge 140 \\ 0{,}6x + 1{,}5y \ge 9. \end{cases}$ Miền nghiệm của hệ bất phương trình này là miền tứ giác $ABCD$ trong hình dưới đây: 

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

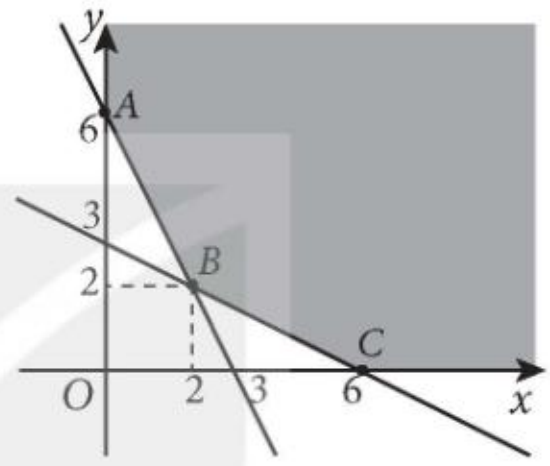
		Chi phí thuê xe là $F(x;y) = 4x + 3y$ (triệu đồng). Tính giá trị của biểu thức $F(x;y) = 4x + 3y$ tại các đỉnh $ABCD$ ta được giá trị nhỏ nhất là $F(5;4) = 32$. Vậy chi phí thuê xe thấp nhất là 32 triệu đồng khi thuê 5 xe loại A và 4 xe loại B.

Tiết 3

3. BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH VỚI MIỀN CHẤP NHẬN ĐƯỢC KHÔNG LÀ MIỀN ĐA GIÁC		
HĐ3. Giải một bài toán quy hoạch tuyến tính cụ thể mà miền chấp nhận được không là miền đa giác	Dẫn dắt HS giải một bài toán quy hoạch tuyến tính cụ thể mà miền chấp nhận được không là miền đa giác. Từ đó HS tự chiếm lĩnh được nội dung của Nhận xét sau HĐ3.	– HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ3 dưới sự hướng dẫn của GV. – GV vẽ hình lên bảng và chính xác hoá câu trả lời của HS; giải thích tường tận cho HS điều kiện cần và đủ của tham số m để $d_m \cap S \neq \varnothing$, từ đó suy ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm mục tiêu.
Nhận xét	Giúp HS nắm được nội dung của Nhận xét: – Khi bài toán quy hoạch tuyến tính có phương án tối ưu thì phương án tối ưu sẽ rơi vào một trong các phương án cực biên. – Với bài toán mà miền chấp nhận được không là miền đa giác thì bài toán có thể không có phương án tối ưu.	GV gọi một HS đứng tại chỗ đọc nội dung Nhận xét và ghi chép vắn tắt kết quả chính lên bảng.

Ví dụ 5. Bài toán khẩu phần ăn	Giúp HS giải bài toán quy hoạch tuyến tính hai biến mà miền chấp nhận được không là miền đa giác và bài toán có duy nhất phương án tối ưu.	GV cho HS đọc kĩ các yêu cầu của bài toán và trình bày cặn kẽ lời giải lên bảng và yêu cầu HS ghi chép cẩn thận vào vở ghi.
Ví dụ 6. Giải một bài toán quy hoạch tuyến tính cụ thể	Cung cấp cho HS lời giải chi tiết ba bài toán quy hoạch tuyến tính với miền chấp nhận được không là miền đa giác, một bài có duy nhất phương án tối ưu, một bài có vô số phương án tối ưu và một bài không có phương án tối ưu.	GV trình bày chi tiết lời giải lên bảng và yêu cầu HS ghi chép cẩn thận lời giải vào vở ghi. Trong quá trình giảng, có thể gọi HS đứng tại chỗ trả lời câu hỏi.
Luyện tập 3. Giải một bài toán quy hoạch tuyến tính cụ thể	Cung cấp cho HS một bài toán quy hoạch tuyến tính tương tự Ví dụ 6 nhưng đơn giản hơn để HS tự thực hành.	Miền chấp nhận được không là miền đa giác, được tô đậm trong hình dưới đây (góc phần tư thứ nhất trừ đi miền tứ giác $OABC$).  Bài toán có vô hạn phương án tối ưu là $y=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}x$ với mọi $x\in\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$.
Vận dụng	Cung cấp cho HS lời giải một bài toán quy hoạch tuyến tính trong thực tiễn.	Gọi x, y lần lượt là số tạ phân bón X, số tạ phân bón Y cần mua. Ta có hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn:

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

		$\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 3x + 6y \geq 18 \\ 2x + y \geq 6. \end{cases}$ Miền nghiệm của hệ trên là miền tô màu, không là miền đa giác, giới hạn bởi hai trục Ox, Oy và ba điểm $A(0;6)$, $B(2;2)$ và $C(6;0)$.  Hàm chi phí là $F(x;y) = 1,7x + 1,2y$ (triệu đồng). Chi phí đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5,8 triệu đồng tại $B(2;2)$.
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 4 + 5: CHỮA BÀI TẬP

3. Lựa chọn bài tập

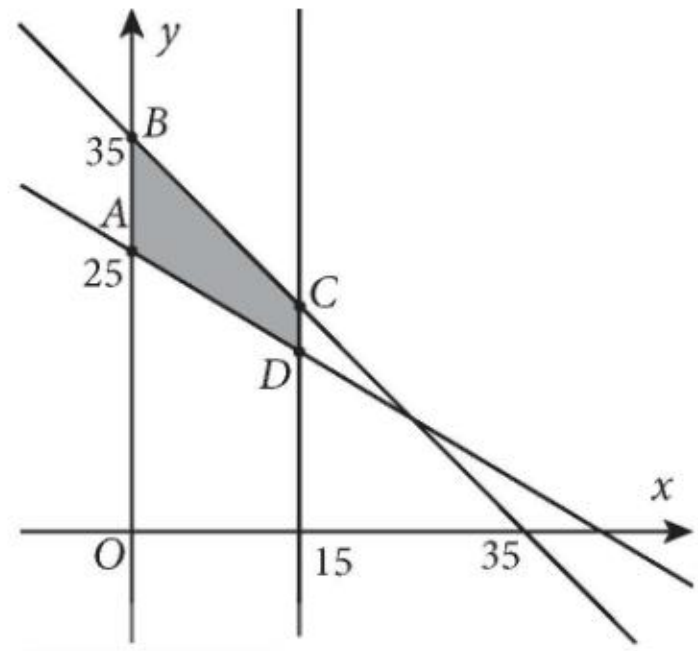
- Bài toán quy hoạch tuyến tính với miền chấp nhận được là miền đa giác: Bài tập 2.1, 2.2 và 2.3.
- Bài toán quy hoạch tuyến tính với miền chấp nhận được không là miền đa giác: Bài tập 2.4 và 2.5.

IV ĐÁP SỐ/HƯỚNG DẪN/LỜI GIẢI BÀI TẬP

2.1. Gọi x, y lần lượt là số bàn hình chữ nhật và số bàn tròn mà anh Nam cần thuê.

Ta có hệ:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 15,\ y \ge 0 \\ x + y \le 35 \\ 6x + 10y \ge 250. \end{cases}$$

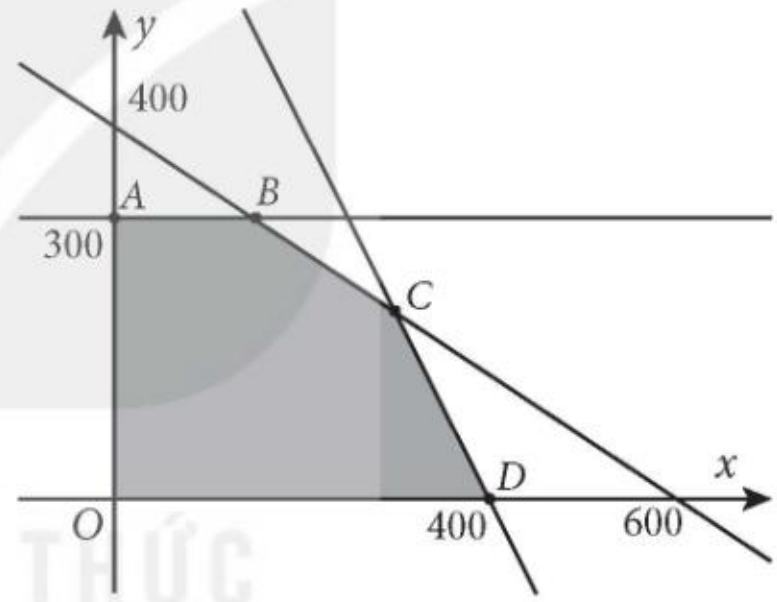


Miền nghiệm của hệ trên là miền tứ giác $ABCD$ với $A(0; 25)$; $B(0; 35)$; $C(15; 20)$; $D(15; 16)$. Chi phí thuê phòng là $F(x; y) = 200x + 300y$ (nghìn đồng). Chi phí đạt giá trị nhỏ nhất bằng 7,5 triệu đồng tại $A(0;25)$.

2.2. Gọi x, y lần lượt là số đơn vị sữa X, số đơn vị sữa Y cần sản xuất.

Ta có hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn:

$$\begin{cases} x \ge 0,\ y \ge 0 \\ 2x + 3y \le 1\,200 \\ 2x + y \le 800 \\ y \le 300. \end{cases}$$

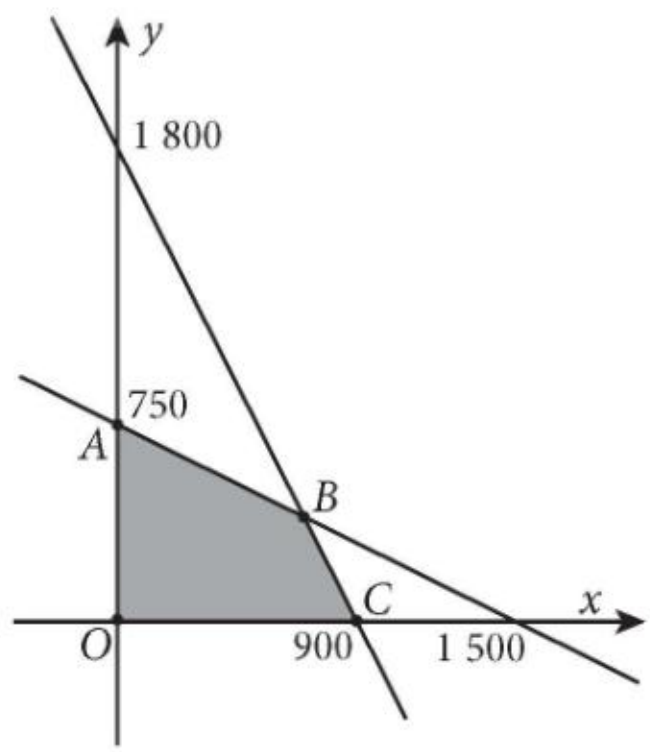


Miền nghiệm của hệ trên là miền ngũ giác $OABCD$ với $A(0; 300)$; $B(150; 300)$; $C(300; 200)$ và D$(400; 0)$.

Lợi nhuận thu được là $F(x; y) = 0{,}8x + 1{,}2y$ (triệu đồng). Lợi nhuận lớn nhất bằng 480 triệu đồng tại mọi điểm thuộc đoạn BC.

2.3. Gọi x, y lần lượt là số đơn vị hợp chất X và Y mà nhà máy cần sản xuất mỗi tuần. Ta có hệ:

$$\begin{cases} x \ge 0,\ y \ge 0 \\ 2x + 4y \le 3\,000 \\ 6x + 3y \le 5\,400. \end{cases}$$

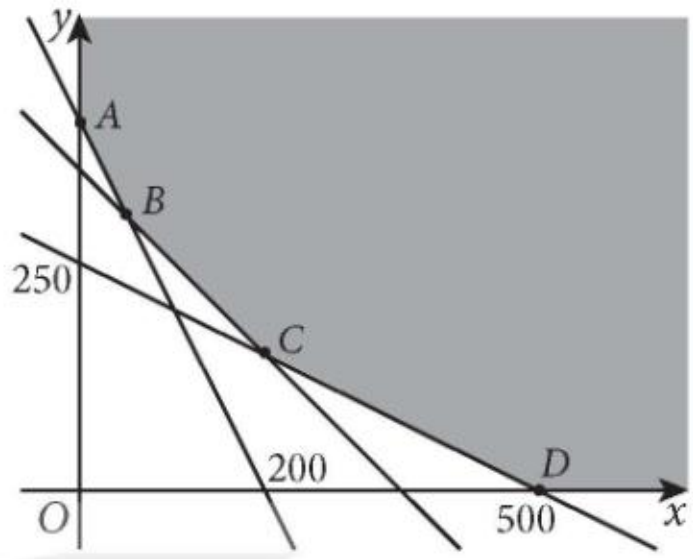


Miền nghiệm của hệ trên là miền tứ giác tô đậm trong hình bên. Các điểm cực biên $O(0; 0)$; $A(0; 750)$; $B(700; 400)$ và $C(900; 0)$.

Lợi nhuận của nhà máy theo tuần là $F(x;y)=36x+24y$ (nghìn đồng). Lợi nhuận đạt giá trị lớn nhất bằng 34 800 000 đồng tại $B(700;400)$.

2.4. Gọi x, y lần lượt là số đơn vị thức ăn F_1 và F_2 của một người mỗi ngày. Ta có hệ:

$$\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 2x+y \geq 400 \\ x+2y \geq 500 \\ 4x+4y \geq 1\,400. \end{cases}$$

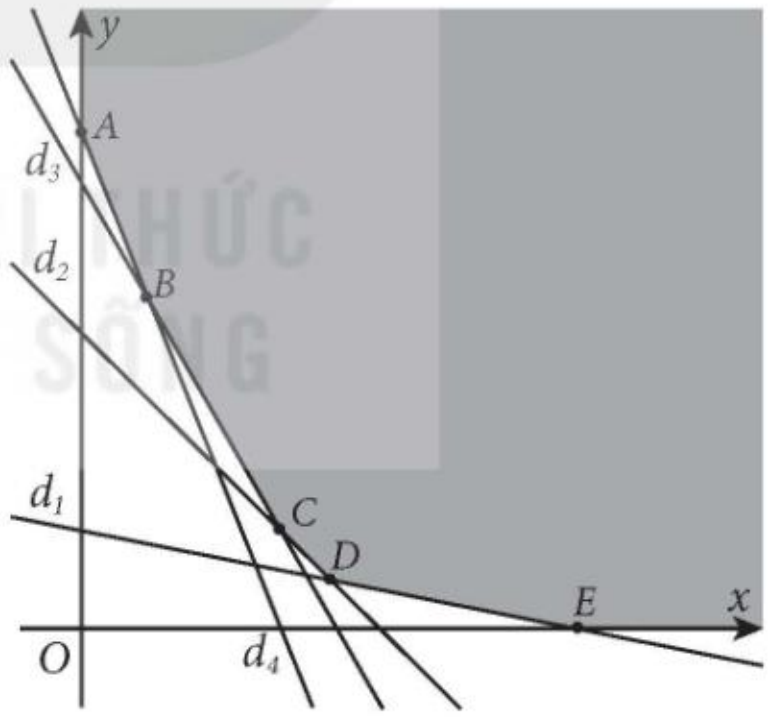


Miền nghiệm của hệ trên là miền không bị chặn tô đậm trong hình bên, tức là góc phần tư thứ nhất trừ đi miền ngũ giác $OABCD$. Các điểm cực biên $A(0;\ 400)$; $B(50;\ 300)$; $C(200;\ 150)$; $D(500;\ 0)$.

Chi phí mua thức ăn là $F(x;y)=1\,200x+720y$ (đồng). Chi phí đạt giá trị nhỏ nhất bằng 276 000 đồng tại $B(50;\ 300)$.

2.5. Gọi x, y lần lượt là số gam thức ăn loại S_1 và S_2 cần thêm vào 100 g thức ăn cho gà. Ta có hệ:

$$\begin{cases} 0 \leq x, y \\ 5x+25y \geq 50 \\ 25x+10y \geq 100 \\ 10x+10y \geq 60 \\ 35x+20y \geq 180. \end{cases}$$



Miền nghiệm của hệ trên là miền không bị chặn tô đậm trong hình bên. Các điểm cực biên là $A(0;10)$; $B\left(\frac{4}{3};\frac{20}{3}\right)$; $C(4;2)$; $D(5;1)$ và $E(10;0)$.

Chi phí mua hai loại thức ăn S_1 và S_2 để bổ sung cho mỗi 100 g thức ăn cho gà là $F(x;y)=720x+960y$ (đồng). Chi phí này đạt giá trị nhỏ nhất bằng 4 560 đồng tại $D(5;1)$.

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

Bài 4. VẬN DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ BÀI TOÁN TỐI ƯU (5 tiết)

I MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Vận dụng được các kiến thức về đạo hàm để giải quyết một số bài toán tối ưu xuất hiện trong thực tiễn.
- Vận dụng được các kiến thức về đạo hàm để giải quyết một số bài toán tối ưu trong kinh tế.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Rèn luyện năng lực tư duy và lập luận toán học thể hiện qua việc vận dụng đạo hàm để giải quyết một số bài toán tối ưu.
- Rèn luyện năng lực mô hình hoá toán học thông qua việc giải quyết một số bài toán thực tiễn gắn liền với giải quyết một số bài toán tối ưu, bài toán kinh tế.
- Bồi dưỡng hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

II NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Nội dung *Vận dụng đạo hàm để giải quyết một số bài toán tối ưu* trong sách *Chuyên đề học tập Toán 12* có nhiều khác biệt so với các nội dung đã có trong sách giáo khoa cũ. Trong đó nhấn mạnh ứng dụng đạo hàm vào giải quyết bài toán tối ưu trong khoa học: Vật lí, Hoá học,... và một số bài toán kinh tế.
- Chuẩn bị:
  + GV chuẩn bị thông tin về một số bài toán thực tế liên quan đến hàm số, ứng dụng của hàm số, đạo hàm hàm số như bài toán tối ưu trong chuyển động, bài toán tìm đường đi ngắn nhất, phản xạ, khúc xạ ánh sáng, các bài toán tối ưu trong kinh tế,...
  + GV và HS chuẩn bị MTCT để thực hành tính toán.

III GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

- Dự kiến phân bổ thời gian: 5 tiết. Cụ thể như sau:
  + Tiết 1, 2, 3: Mục 1. Vận dụng đạo hàm để giải quyết một số bài toán tối ưu trong thực tiễn;

+ Tiết 4, 5: Mục 2. Vận dụng đạo hàm để giải quyết một số bài toán tối ưu trong kinh tế; Chữa bài tập.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Tình huống mở đầu	Giúp HS có hứng thú và gợi động cơ với nội dung bài học.	GV nêu tình huống về Nguyên lí Fermat và ứng dụng của nó trong Vật lí là một ví dụ điển hình mô tả rõ tầm quan trọng và các cách xuất hiện của bài toán tối ưu trong khoa học, kĩ thuật. GV có thể giới thiệu một số bài toán tối ưu trong kinh tế.
1. VẬN DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ BÀI TOÁN TỐI ƯU TRONG THỰC TIỄN		
HĐ	Giúp HS tiếp cận với bài toán tối ưu trong chuyển động.	HS tự thực hành các yêu cầu của hoạt động dưới sự hướng dẫn của GV. *Hướng dẫn* a) Chọn các kí hiệu cho các đại lượng đã biết và đại lượng chưa biết trong bài toán: Kí hiệu S_1, v_1 là quãng đường và vận tốc chèo thuyền của người đánh cá khi chèo thuyền. Kí hiệu S_2, v_2 là quãng đường và vận tốc của người đánh cá khi đi bộ dọc bờ biển. Ta có $v_1 = 3$ km/h, $v_2 = 5$ km/h. Kí hiệu $PQ = x$ (km), $x \in [0;6]$. b) Ta có $S_2 = BQ = 6 - x$ (km). Vì tam giác APQ vuông tại P nên $S_1 = AQ = \sqrt{AP^2 + PQ^2} = \sqrt{2^2 + x^2} = \sqrt{4 + x^2}$. c) Nếu anh ấy chèo đến P rồi đi bộ về nhà thì ta có $S_1 = AP = 2, S_2 = BP = 6$. $t_1 = \frac{S_1}{v_1} = \frac{2}{3}, t_2 = \frac{S_2}{v_2} = \frac{6}{5}$. Do đó $t = t_1 + t_2 = \frac{28}{15}$ (giờ).

		Nếu anh ấy chèo thuyền đến P rồi đi bộ về nhà thì hết $\frac{28}{15}$ giờ. d) Nếu anh ấy chèo thuyền đến điểm Q rồi đi bộ về nhà thì ta có $S_1 = AQ = \sqrt{4+x^2}$, $S_2 = BQ = 6-x$. $$t_1 = \frac{S_1}{v_1} = \frac{\sqrt{4+x^2}}{3},\ t_2 = \frac{S_2}{v_2} = \frac{6-x}{5}.$$ Do đó $t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{4+x^2}}{3} + \frac{6-x}{5}$ (giờ). Nếu anh ấy chèo thuyền đến điểm Q ở phía bắc điểm P, với $PQ = x$ (km), rồi đi bộ về nhà thì hết $$\frac{\sqrt{4+x^2}}{3} + \frac{6-x}{5} \text{ (giờ).}$$
Khung kiến thức	Giúp HS nắm được các bước giải bài toán tối ưu bằng cách sử dụng đạo hàm.	GV yêu cầu HS đọc và ghi nhớ.
Ví dụ 1	Giúp HS luyện tập các thao tác ứng dụng đạo hàm để giải bài toán tối ưu.	GV trình bày cẩn thận Ví dụ lên bảng, hướng dẫn chi tiết từng bước biến đổi trong bài, và yêu cầu HS ghi chép vào vở ghi.
Luyện tập 1	Cung cấp cho HS một tình huống thực tế trong Vật lí.	a) Quỹ đạo chuyển động $$y = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}.x^2 + x\tan\alpha. \qquad (1)$$ Hàm số (1) có dạng của hàm số bậc hai biến x với hệ số cao nhất âm, do đó đồ thị hàm số là một đường parabol có đỉnh ở trên. Độ cao nhất của vật trên quỹ đạo ứng với tung độ đỉnh của parabol. Khi đó $x_P = \sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\frac{v_0^2}{g};\ y_P = \sin^2\alpha\cdot\frac{v_0^2}{2g}$.

		Với $v_0 = 9$ (m/s), $g = 9{,}8$ (m/s^2) ta có độ cao lớn nhất của vật là $y_P = \sin^2\alpha \cdot \frac{405}{98}$ (m). Thời điểm vật đạt được độ cao lớn nhất là $t_P = \frac{x_P}{v_0 \cos\alpha} = \frac{v_0}{g}\sin\alpha = \frac{9}{9{,}8}\sin\alpha = \frac{45}{49}\sin\alpha.$ b) Tầm ném xa trong chuyển động ném xiên là $L = 2x_P = \sin 2\alpha \cdot \frac{v_0^2}{g} = \frac{810}{98} \cdot \sin 2\alpha \le \frac{405}{49}.$ Tầm ném xa đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{405}{49}$ m khi $\sin 2\alpha = 1$ hay $\alpha = \frac{\pi}{4}.$
Ví dụ 2	Giúp HS luyện tập các kĩ năng giải bài toán thực tế qua ứng dụng đạo hàm (hiện tượng phản xạ ánh sáng trong Vật lí).	– GV trình bày cẩn thận Ví dụ lên bảng, hướng dẫn chi tiết từng bước biến đổi trong bài và yêu cầu HS ghi chép vào vở ghi. – GV yêu cầu HS đọc Định luật phản xạ ánh sáng.
Luyện tập 2	Rèn luyện kĩ năng ứng dụng đạo hàm trong một tình huống của khoa học kĩ thuật (Hiện tượng khúc xạ ánh sáng trong Vật lí).	GV hướng dẫn HS làm bài. *Hướng dẫn.* Kí hiệu tổng thời gian di chuyển từ A đến B của tia sáng là T. Ta có: $T(x) = \frac{AP}{v_{kk}} + \frac{PB}{v_n}$ $= \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_{kk}} + \frac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{v_n}, 0 \le x \le c.$ Lấy đạo hàm của hàm số $T(x)$ ta có $T'(x) = \frac{x}{v_{kk}.\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c-x}{v_n.\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}, 0 \le x \le c.$ Xét phương trình $T'(x) = 0$, ta có

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

		$\frac{x}{v_{kk}\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{c-x}{v_n\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$. Từ hình vẽ ta có $\sin i = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}; \sin r = \frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$. Do đó $\frac{\sin i}{v_{kk}} = \frac{\sin r}{v_n}$ hay $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_{kk}}{v_n}$.
2. VẬN DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ BÀI TOÁN TỐI ƯU TRONG KINH TẾ		
Nhận xét	Giúp HS nhận biết vai trò, khái niệm của các hàm số trong kinh tế học.	GV yêu cầu HS đọc và ghi chép vào vở ghi.
Ví dụ 3	Giúp HS luyện tập nhận biết các hàm số kinh tế học, và làm quen bài toán tối đa hoá doanh thu.	GV trình bày cẩn thận Ví dụ lên bảng, hướng dẫn chi tiết từng bước biến đổi trong bài, và yêu cầu HS ghi chép vào vở ghi.
Ví dụ 4	Giúp HS luyện tập nhận biết các hàm số trong kinh tế học thông qua mô hình hoá bài toán thực tiễn, giải bài toán tối đa hoá lợi nhuận.	– GV hướng dẫn HS tìm hiểu ví dụ và nhận xét sự khác biệt giữa hàm doanh thu và lợi nhuận. – GV yêu cầu HS ghi chép vào vở ghi.
Luyện tập 3	Cung cấp cho HS một tình huống thực tế để củng cố năng lực mô hình hoá toán học,	GV hướng dẫn HS làm bài. *Hướng dẫn.* Gọi x (đơn vị triệu đồng) là số tiền giảm giá cho mỗi chiếc xe máy, $x \geq 0$. Khi đó số tiền thu được khi bán một chiếc xe máy là $31 - x - 27 = 4 - x$ (triệu đồng).

	giải bài toán tối ưu tối đa hoá lợi nhuận.	Số lượng xe máy bán ra là: $600+200x$ (chiếc). Hàm chi phí cho $600+200x$ xe máy là $(600+200x)\cdot 27$ (triệu đồng). Hàm doanh thu cho $600+200x$ xe máy là $(600+200x)(31-x)$ (triệu đồng). Khi đó lợi nhuận thu được là $P(x)=(31-x)(600+200x)-27(600+200x)$ $=(4-x)(600+200x)=2\,400+200x-200x^2$ (triệu đồng). Để tối đa hoá lợi nhuận, thì ta phải tìm giá trị lớn nhất của hàm $P(x)$ với $x\geq 0$. Ta có $P'(x)=200-400x=0$ khi $x=\frac{1}{2}$. Sử dụng quy tắc xét dấu đạo hàm bậc nhất của hàm số, ta thấy $P\left(\frac{1}{2}\right)=2\,450$ (triệu đồng) là giá trị lớn nhất của hàm lợi nhuận, đạt được khi $x=0,5$. Tức là mỗi chiếc xe máy nên giảm giá 500 nghìn đồng. Vậy giá bán mới nên là 30,5 triệu đồng thì doanh nghiệp sẽ thu được nhiều lợi nhuận nhất.
Nhận xét	Giúp HS nhận biết khái niệm chi phí biên, doanh thu biên và lợi nhuận biên trong kinh tế học.	GV yêu cầu HS đọc và ghi chép vào vở ghi.
Ví dụ 5	Cho HS thực hành xác định giá trị và công thức các hàm số trong kinh tế học: chi phí,	GV hướng dẫn HS làm bài, gọi HS lên bảng trình bày và yêu cầu HS ghi chép vào vở ghi.

	chi phí trung bình, chi phí biên. Làm quen bài toán cực tiểu hoá chi phí trung bình.	
Luyện tập 4	Cho HS một tình huống để củng cố kiến thức về bài toán tối đa hoá lợi nhuận.	GV hướng dẫn HS làm bài. *Hướng dẫn.* Hàm doanh thu của x đơn vị hàng hoá là $R(x) = x \cdot p(x) = 1\,700x - 7x^2$. Hàm doanh thu biên $R'(x) = 1\,700 - 14x$. Chi phí biên $C'(x) = 500 - 3{,}28x + 0{,}012x^2$. Điểm tối đa hoá lợi nhuận là điểm mà tại đó doanh thu biên bằng với chi phí biên, tức là $R'(x) = C'(x)$. Do đó ta có $1\,700 - 14x = 500 - 3{,}28x + 0{,}012x^2$, hay $x_0 \approx 100{,}61$. Do đó hàm lợi nhuận đạt giá trị lớn nhất tại $x_0 \approx 100{,}61$. Vậy, với mức sản xuất mỗi ngày 101 đơn vị hàng hoá thì công ty sẽ đạt lợi nhuận lớn nhất.
Chữa bài tập	GV gợi ý hoặc cho HS chữa một số bài tập cuối bài trong sách.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

3. Lựa chọn bài tập

- Ứng dụng đạo hàm trong bài toán thực tiễn (kĩ thuật, khoa học): Bài tập 2.6, 2.7.
- Ứng dụng đạo hàm giải một số bài toán tối ưu trong kinh tế: Bài tập 2.8, 2.9, 2.10.

IV ĐÁP SỐ/HƯỚNG DẪN/LỜI GIẢI BÀI TẬP

2.6. Kí hiệu $2x$ là chiều rộng của hình chữ nhật, y là chiều dài của hình chữ nhật (tính bằng mét). Khi đó độ dài mép ngoài của cửa sổ là $2x+2y+\pi x$ (m).

Từ giả thiết ta có:

$$2x+2y+\pi x=10.$$

Từ đây suy ra $2y=10-2x-\pi x$. Vì $0<2x\le y=\dfrac{10-2x-\pi x}{2}$ nên ta có

$$0<x\le\frac{10}{6+\pi}.$$

Diện tích của cửa sổ là

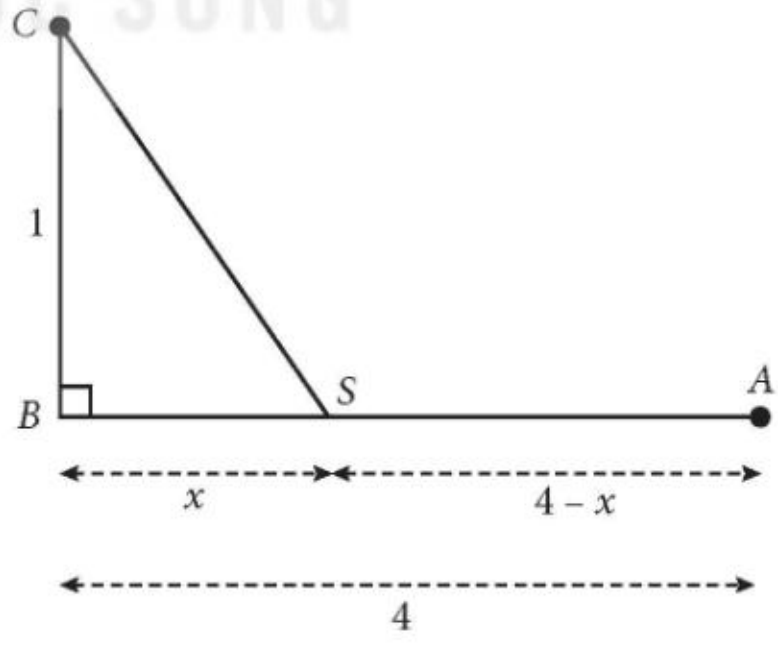
$$S=2xy+\frac{\pi x^2}{2}=10x-\frac{\pi+4}{2}x^2,\ 0<x\le\frac{10}{6+\pi}.$$

Dễ thấy trên nửa khoảng $\left(0;\dfrac{10}{6+\pi}\right]$, diện tích S đạt giá trị lớn nhất tại $x=\dfrac{10}{6+\pi}$.

Khi đó $y=\dfrac{1}{2}(10-2x-\pi x)=\dfrac{20}{6+\pi}$.

Vậy, cửa sổ có diện tích lớn nhất khi hình chữ nhật có chiều rộng bằng $2x=\dfrac{20}{6+\pi}\approx 2{,}19$ (m) và chiều dài bằng $y=\dfrac{20}{6+\pi}\approx 2{,}19$ (m) (tức là khi hình chữ nhật là hình vuông có độ dài cạnh là 2,19 m).

2.7. Đặt $BS=x$ (km)$(0<x<4)$, ta có:



$$\begin{cases} CS=\sqrt{1+x^2} \\ SA=4-x \end{cases}$$

Khi đó, chi phí cần bỏ ra là:

$$f(x)=5\,000\sqrt{1+x^2}+3\,000(4-x).$$

Bài toán trở thành: "Tìm GTNN của $f(x)$ trên $(0;4)$".

Xét hàm số $f(x)$ trên $(0;4)$, ta có: $f'(x)=\dfrac{5\,000x}{\sqrt{1+x^2}}-3\,000.$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1\,000\left(5x-3\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{1+x^2}=5x \Leftrightarrow \begin{cases}0<x<4\\ 9\left(1+x^2\right)=25x^2\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{3}{4}.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0		$\frac{3}{4}$		4	$+\infty$
$f'(x)$		$-$		0	$+$		
$f(x)$		$f(0)$	↘	$16\,000$	↗	$f(4)$	

Từ bảng biến thiên ta có $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 16 000 tại $x=\frac{3}{4}$.

Vậy điểm S trên bờ biển cần tìm cách A một khoảng $4-\frac{3}{4}=\frac{13}{4}$ (km).

2.8. Doanh thu $R(x)=50\,000x\left(3-\frac{x}{40}\right)^2$ đồng. Xe thu được doanh thu cao nhất khi chở 40 hành khách và lợi nhuận khi đó bằng 8 000 000 đồng.

2.9. Giả sử thùng sơn có bán kính đáy R và chiều cao h. Khi đó, ta có:

$$V=\pi R^2h=5\cdot 10^{-3}\ (\mathrm{m}^3)\Rightarrow h=\frac{5\cdot 10^{-3}}{\pi R^2}.$$

Ta cần tìm số tiền tối thiểu để sản xuất một thùng sơn. Gọi số tiền sản xuất 1 thùng sơn là T và T_1, T_2 lần lượt là số tiền sản xuất mặt xung quanh và mặt đáy.

$$T_1=10^5\cdot 2\pi Rh=\frac{10^3}{R};\ T_2=12\cdot 10^4\cdot \pi R^2$$

$$\Rightarrow T=T_1+2T_2=\frac{10^3}{R}+24\cdot 10^4\cdot \pi R^2.$$

Ta đi tìm giá trị nhỏ nhất của T.

$$\min T = T\left(\sqrt[3]{\frac{1}{480\pi}}\right) \approx 17\,201{,}05 \Rightarrow n = \frac{10^9}{\min T} \approx 58\,135{,}99 \text{ (thùng).}$$

Vậy, với 1 tỉ đồng có thể sản xuất được tối đa 58 135 thùng sơn.

2.10. Hàm doanh thu của x đơn vị hàng hoá là $R(x) = xp(x) = 1\,500x - 3x^2$. Hàm doanh thu biên $R'(x) = 1\,500 - 6x$.

Chi phí biên $C'(x) = 500 - 3{,}2x + 0{,}012x^2$.

a) Hàm lợi nhuận

$$P(x) = R(x) - C(x) = 1\,500x - 3x^2 - \left(18\,000 + 500x - 1{,}6x^2 + 0{,}004x^3\right)$$
$$= -18\,000 + 1\,000x - 1{,}4x^2 - 0{,}004x^3.$$

b) Điểm tối đa hoá lợi nhuận là điểm mà tại đó doanh thu biên bằng với chi phí biên, tức là $R'(x) = C'(x)$. Do đó ta có

$$1\,500 - 6x = 500 - 3{,}2x + 0{,}012x^2,$$

hay $x \approx 194{,}69$.

Do đó để lợi nhuận thu được là lớn nhất thì mức sản xuất là 195 đơn vị hàng hoá.

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

BÀI TẬP CUỐI CHUYÊN ĐỀ 2 (2 tiết)

I GỢI Ý DẠY HỌC

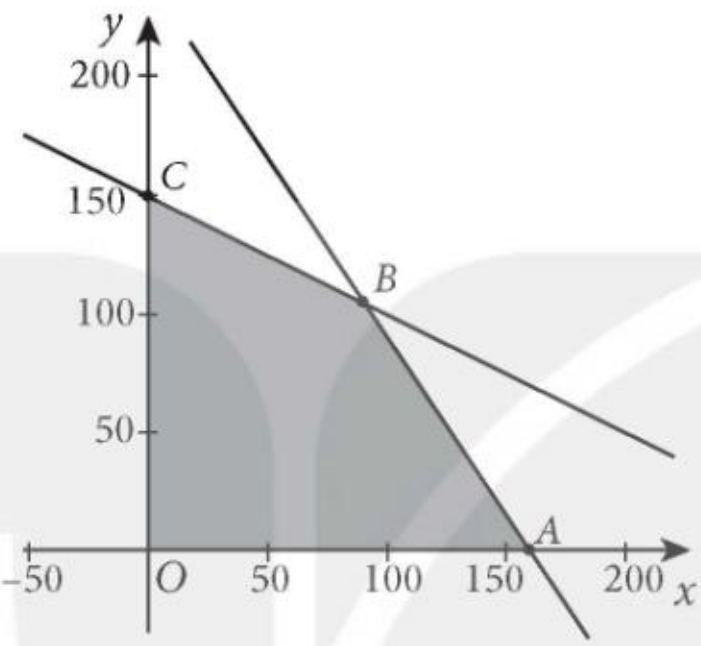
- GV hệ thống hoá kiến thức lí thuyết trong Chuyên đề 2 (có thể chuẩn bị slide tổng kết kiến thức).
- GV hệ thống các dạng toán cơ bản và nhắc lại ngắn gọn phương pháp giải, cũng như những lưu ý cần thiết.
- Tuỳ tình hình thực tế của lớp, GV có thể cho HS chữa một số bài tập ở Bài tập cuối chuyên đề 2 theo dụng ý sư phạm của mình.

II ĐÁP SỐ/HƯỚNG DẪN/LỜI GIẢI BÀI TẬP

2.11. a) Theo đề bài, ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 250x + 500y \leq 75000 \\ 750x + 500y \leq 120000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 300 \\ 3x + 2y \leq 480. \end{cases}$$

b) Miền nghiệm của hệ bất phương trình này là miền tứ giác $OABC$ trong hình vẽ với $O(0; 0)$, $A(160; 0)$, $B(90; 105)$, $C(0; 150)$.



c) Lợi nhuận thu được là $F(x; y) = 30x + 40y$ (nghìn đồng).

Tính giá trị của biểu thức $F(x; y)$ tại các đỉnh của tứ giác, ta được:

$$F(0; 0) = 0;\ F(160; 0) = 4800;\ F(90; 105) = 6900;\ F(0; 150) = 6000.$$

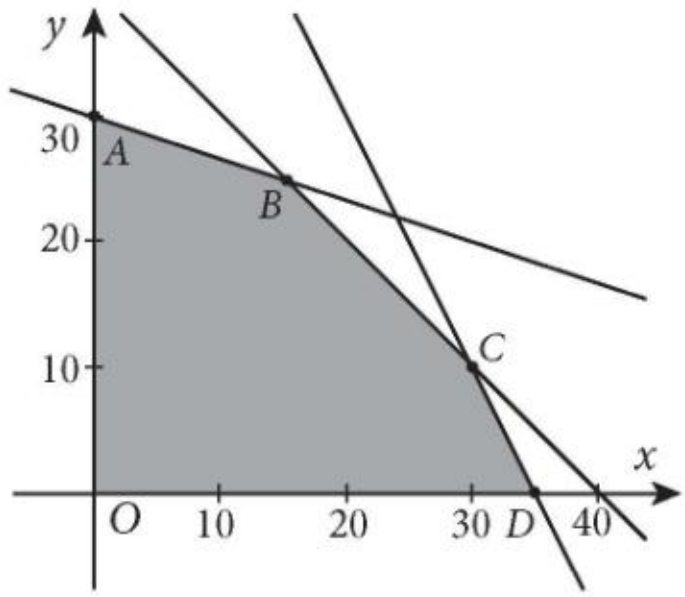
Vậy lợi nhuận thu được lớn nhất là 6 900 nghìn đồng khi $x = 90$ và $y = 105$, tức là cần chuẩn bị 90 gói cà phê tiêu chuẩn và 105 gói cà phê cao cấp.

2.12. Gọi x, y lần lượt là số sản phẩm thứ nhất và số sản phẩm thứ hai của nhà máy.

Theo đề bài, ta có hệ bất phương trình: $\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 70 \\ x + y \leq 40 \\ x + 3y \leq 90. \end{cases}$

Miền nghiệm của hệ bất phương trình này là miền ngũ giác $OABCD$ như hình vẽ dưới đây với $O(0; 0)$; $A(0; 30)$; $B(15; 25)$; $C(30; 10)$ và $D(35; 0)$.

Lợi nhuận thu được là $F(x; y) = 400x + 600y$ (nghìn đồng).



Tính giá trị của biểu thức $F(x;y)$ tại các đỉnh của ngũ giác, ta được:

$F(0;0)=0$; $F(0;30)=18000$; $F(15;25)=21000$;

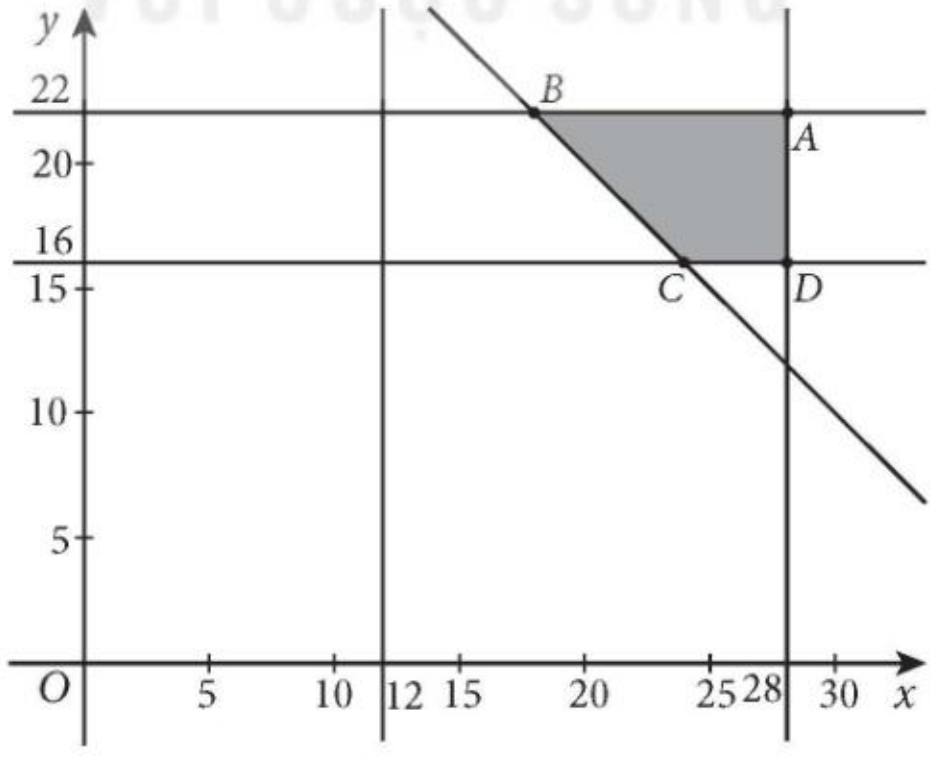
$F(30;10)=18000$; $F(35;0)=14000$.

Vậy lợi nhuận thu được lớn nhất là 21 000 nghìn đồng khi $x = 15$ và $y = 25$, tức là cần sản xuất 15 sản phẩm thứ nhất và 25 sản phẩm thứ hai.

2.13. Gọi x, y lần lượt là số đại diện bán hàng ở Hà Nội và Thành phố Hồ Chí Minh sẽ tham dự cuộc họp.

Theo đề bài, ta có hệ bất phương trình: $\begin{cases} 12 \le x \le 28 \\ 16 \le y \le 22 \\ x + y \ge 40. \end{cases}$

Miền nghiệm của hệ bất phương trình này là miền tứ giác $ABCD$ như hình vẽ với $A(28; 22)$, $B(18; 22)$, $C(24; 16)$ và $D(28; 16)$.



Tổng chi phí vé máy bay là $F(x;y) = 2x + 2,4y$ (triệu đồng).

Tính giá trị của biểu thức $F(x;y)$ tại các đỉnh của ngũ giác, ta được:

$F(28;22)=108{,}8;\ F(18;22)=88{,}8;$

$F(24;16)=86{,}4,\ F(28;16)=94{,}4.$

Vậy tổng chi phí vé máy bay nhỏ nhất là 86,4 triệu đồng khi $x=24$ và $y=16$, tức là cần cử 24 đại diện bán hàng ở Hà Nội và 16 đại diện bán hàng ở Thành phố Hồ Chí Minh đến dự cuộc họp.

2.14. Ta có $0\le\theta<90°$.

Ta có $F'(\theta)=\dfrac{-cmg(c\cos\theta-\sin\theta)}{(c\sin\theta+\cos\theta)^2};F'(\theta)=0\Leftrightarrow c\cos\theta-\sin\theta=0\Leftrightarrow\tan\theta=c.$

Giả sử $\theta=\theta_0$ thoả mãn $\tan\theta_0=c$.

Khi $0\le\theta<\theta_0$ thì $F'(\theta)<0$, khi $\theta_0<\theta<90^o$ thì $F'(\theta)>0$. Do đó lực kéo F nhỏ nhất tại $\theta=\theta_0$ tức là khi $\tan\theta=c$.

2.15. Đặt $BD=x$, ta có $AC=\sqrt{x^2+9}$. Khi đó $\sin D=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+49}}$.

Xét tam giác ACD, ta có

$$\frac{AC}{\sin D}=\frac{CD}{\sin\widehat{DAC}}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x^2+9}}{\frac{x}{\sqrt{x^2+49}}}=\frac{4}{\sin\widehat{DAC}}\Leftrightarrow\sin\widehat{DAC}=\frac{4x}{\sqrt{x^2+9}.\sqrt{x^2+49}}.$$

Để có được tầm nhìn thuận lợi thì góc nhìn θ phải lớn nhất.

Xét hàm số

$$y=\frac{4x}{\sqrt{x^2+9}\cdot\sqrt{x^2+49}}=\frac{4x}{\sqrt{(x^2+9)(x^2+49)}}=\frac{4x}{\sqrt{x^4+58x^2+441}},x>0.$$

Ta có $y'=\dfrac{-4x^4+1764}{(x^4+58x^2+441)\sqrt{x^4+58x^2+441}}=0\Leftrightarrow x=\sqrt{21}\approx4{,}58.$

Vậy người đó phải đứng cách tường khoảng 4,58 m thì tầm nhìn là thuận lợi nhất.

2.16. Gọi chiều cao cột đèn là h (mét) ($h>0$). Ta có:

$$I=\frac{\sin\theta}{s}=\frac{h}{s^2}=\frac{h}{h^2+400},h>0;$$

$$I' = \frac{h^2 + 400 - 2h^2}{\left(h^2 + 400\right)^2} = \frac{400 - h^2}{\left(h^2 + 400\right)^2}; I' = 0 \Leftrightarrow h = 20 \text{ (do } h > 0\text{)}.$$

Khi đó tại $h = 20$ thì hàm số $I = \dfrac{h}{h^2 + 400}$ đạt giá trị lớn nhất.

Vậy khi chiều cao của cột đèn là 20 m thì sẽ chiếu sáng mạnh nhất cho lối đi bộ.

2.17. a) Hàm lợi nhuận là

$$P(x) = R(x) - C(x) = x(100 - 0{,}5x) - 40x - 37{,}5 = -0{,}5x^2 + 60x - 37{,}5.$$

Ta có $P'(x) = -x + 60$; $P'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 60$. Dễ thấy hàm lợi nhuận $P(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 60$.

Khi đó $p = 100 - 0{,}5 \cdot 60 = 70$ (nghìn đồng).

Vậy nếu bán mỗi đơn vị hàng hoá với giá 70 nghìn đồng thì lợi nhuận thu được là lớn nhất.

b) Chi phí trung bình cho mỗi đơn vị sản phẩm là $c(x) = \dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{40x + 37{,}5}{x}$.

Khi lợi nhuận là lớn nhất thì chi phí trung bình cho mỗi đơn vị sản phẩm là

$c(60) = 40{,}625$ (nghìn đồng).

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

CHUYÊN ĐỀ 3. ỨNG DỤNG TOÁN HỌC TRONG MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN ĐẾN TÀI CHÍNH

A TỔNG QUAN

1 Vị trí, vai trò của chuyên đề

- Chuyên đề 3 giới thiệu những kiến thức cơ bản về tiền tệ, lãi suất, lạm phát, thẻ tín dụng, vay nợ, cũng như cách thức tính lãi suất, các hình thức gửi tiết kiệm, trả các khoản nợ đúng hạn. Qua đó, HS có thể vận dụng các kiến thức đã học để thiết lập kế hoạch tài chính cá nhân cho các nhu cầu dài hạn cũng như giải quyết một số vấn đề về đầu tư. Đây là những kiến thức phổ thông, cơ bản, thiết yếu về giáo dục tài chính cho người công dân thế kỉ XXI.
- Các ví dụ, bài tập của chuyên đề này được lấy từ chính thực tế hoặc rất gần gũi với thực tế cuộc sống nhằm trang bị cho HS những kiến thức, kĩ năng cần thiết để có thể giải quyết những vấn đề tài chính cơ bản thường gặp trong đời sống. Cơ sở toán học của những kiến thức tài chính trong chuyên đề này là công thức lãi đơn, công thức lãi kép và công thức tính niên kim.

2 Cấu tạo chuyên đề

Chuyên đề này gồm 3 bài học và 2 tiết ôn tập chuyên đề, được thực hiện trong 11 tiết. Cụ thể như sau:

Bài 5. Tiền tệ. Lãi suất	3 tiết
Bài 6. Tín dụng. Vay nợ	3 tiết
Bài 7. Đầu tư tài chính. Lập kế hoạch tài chính cá nhân	3 tiết
Bài tập cuối chuyên đề 3	2 tiết

3 Một số điểm cần lưu ý

- Nội dung của chuyên đề này gắn với thực tiễn nên trong quá trình giảng dạy, GV cố gắng liên hệ với thực tiễn, với các số liệu thực tiễn (tại thời điểm giảng dạy), để làm cho bài học trở nên sinh động hơn và làm cho HS thấy nội dung chuyên đề gần gũi, thiết thực với cuộc sống. Một lưu ý nữa khi giảng dạy là GV cần bám sát các nội dung và yêu cầu cần đạt quy định trong Chương trình, đã được cụ thể hoá trong sách *Chuyên đề học tập Toán 12*, để không bị vượt quá yêu cầu cần đạt của Chương trình.

- Nội dung toán học của chuyên đề được trình bày dựa trên công thức lãi đơn, công thức lãi kép, công thức niên kim và các kiến thức toán học như tỉ số, tỉ số phần trăm, phép tính luỹ thừa và lôgarit, dãy truy hồi,...; các kĩ năng sử dụng máy tính cầm tay, phần mềm bảng tính Excel,... để hỗ trợ tính toán. Vì vậy, GV cần ôn tập, củng cố các kiến thức, kĩ năng cần thiết cho HS trước khi vào học bài mới.

B GIỚI THIỆU CHI TIẾT CÁC BÀI HỌC

Bài 5. TIỀN TỆ. LÃI SUẤT (3 tiết)

I MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Nhận biết được một số vấn đề về tiền tệ.
- Nhận biết được một số vấn đề về lãi suất của các tổ chức tín dụng.
- Tính được lãi suất được hưởng qua tiền tiết kiệm và các giá trị thực chất có tính đến lạm phát.
- Vận dụng được kiến thức toán học trong việc giải quyết một số vấn đề về lãi suất của các tổ chức tín dụng.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Rèn luyện năng lực tư duy và lập luận toán học, năng lực mô hình hoá toán học và năng lực giải quyết vấn đề toán học thông qua việc mô hình hoá và giải quyết những vấn đề thực tiễn liên quan đến lãi suất của các tổ chức tín dụng, vấn đề lạm phát và các giá trị thực chất có tính đến lạm phát.
- Bồi dưỡng hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

II NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

- Về mặt nội dung, bài học này giới thiệu những khái niệm và công thức cơ bản liên quan đến tiền tệ và lãi suất, bao gồm cả lãi đơn và lãi kép và các vấn đề liên quan đến lạm phát như tỉ lệ lạm phát, lãi suất thực, các giá trị thực chất có tính đến lạm phát.

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

– Chuẩn bị:

+ GV tìm hiểu về lịch sử ra đời tiền tệ, một số đơn vị tiền tệ chính, thông dụng trên thế giới; tìm hiểu về tỉ lệ lạm phát thực tế, chỉ số giá tiêu dùng *CPI*, chỉ số giảm phát *GDP* trong những năm gần đây của Việt Nam.

+ HS chuẩn bị máy tính cầm tay.

III GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

Gợi ý phân phối thời gian dạy học: 3 tiết. Cụ thể như sau:

– Tiết 1: Mục 1. Khái niệm tiền tệ.

– Tiết 2: Mục 2. Lãi suất và cách tính lãi suất.

– Tiết 3: Mục 3. Lạm phát.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Tình huống mở đầu	Giúp HS có hứng thú và gợi động cơ với nội dung bài học.	GV chỉ cần nêu tình huống để HS thấy nhu cầu thực tế cần xét những bài toán như vậy.
1. KHÁI NIỆM TIỀN TỆ		
a) Khái niệm tiền tệ	Giới thiệu khái niệm tiền tệ.	– GV giải thích và phân biệt cho HS các khái niệm: tiền tệ, đơn vị tiền tệ. – Có thể yêu cầu HS kể tên các đơn vị tiền tệ (của các nước) thường gặp mà em biết (đô la Mỹ, euro,...) và tỉ giá hối đoái tại thời điểm hiện tại so với Việt Nam đồng.
b) Chức năng của tiền tệ	Giới thiệu các chức năng của tiền tệ.	Nên cho HS thảo luận tìm hiểu trước, sau đó GV mới tổng kết lại một cách hệ thống.
c) Tính chất của tiền tệ	Giới thiệu các tính chất của tiền tệ.	Nên cho HS thảo luận tìm hiểu trước, sau đó GV mới tổng kết lại một cách hệ thống.
d) Nguyên tắc tổng tiền bằng 0	Giới thiệu nguyên tắc tổng tiền bằng 0.	GV giải thích cho HS và nhấn mạnh ý: Tự bản thân tiền pháp định là không có giá trị, mà giá trị của tiền là do giá trị của các tài sản (ngoài tiền) mà nó làm đại diện quyết định.

Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 2

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
2. LÃI SUẤT VÀ CÁCH TÍNH LÃI SUẤT		
Đoạn dẫn mở đầu	Giới thiệu các khái niệm quan trọng: tiền vốn, lãi suất, tiền lãi và những lưu ý quan trọng đối với một khoản vay.	GV giải thích cho HS.
a) Lãi đơn		
HĐ1. Xây dựng công thức lãi đơn	Cho HS làm quen với việc xây dựng công thức lãi đơn.	– GV giải thích cho HS khái niệm lãi đơn. – HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ1. – GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức và lưu ý nội dung của Chú ý.
Ví dụ 1	Rèn luyện kĩ năng áp dụng công thức lãi đơn.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Luyện tập 1	Củng cố kĩ năng áp dụng công thức lãi đơn.	HS tự làm tại lớp. *HD.* Ta có: $P = 50$ triệu đồng; $t = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ (năm); $A = 52$ (triệu đồng) Lãi suất năm của khoản cho vay này là $r = \frac{A - P}{Pt} = \frac{52 - 50}{50 \cdot \frac{1}{2}} = 0{,}08 = 8\%.$
b) Lãi kép		
HĐ2. Xây dựng công thức lãi kép	Cho HS làm quen với việc xây dựng công thức lãi kép.	– GV giải thích cho HS khái niệm: lãi kép. – HS thực hiện lần lượt các yêu cầu trong HĐ2.

		– GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức.
Ví dụ 2	Rèn luyện kĩ năng áp dụng công thức lãi kép.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Luyện tập 2	Củng cố kĩ năng áp dụng công thức lãi kép.	HS tự làm tại lớp. *HD.* Ta có: $P = 100$ (triệu đồng); $t = 3$ (năm); $n = 365$; $r = 9\% = 0{,}09$. Sau 3 năm, số tiền nhận được là $A = P\left(1 + \frac{r}{365}\right)^{365t}$ $= 100 \cdot \left(1 + \frac{0{,}09}{365}\right)^{1\,095} \approx 130{,}992$ (triệu đồng). Số tiền lãi là: $130{,}992 - 100 = 30{,}992$ (triệu đồng).
Vận dụng	Vận dụng tổng hợp kiến thức, kĩ năng trong bài vào giải quyết tình huống thực tế đặt ra ở đầu bài học.	HS tự làm tại lớp. *HD.* Ta tính số tiền lãi mà bác An được hưởng khi gửi theo từng phương án. – Phương án 1: Số tiền lãi mà bác An nhận được vào cuối kì là $500 \cdot 0{,}061 \cdot \frac{3}{4} = 22{,}875$ (triệu đồng). – Phương án 2: Tổng số tiền mà bác An nhận được vào cuối kì gửi là $A = 500 \cdot \left(1 + \frac{0{,}06}{12}\right)^{9} \approx 522{,}955$ (triệu đồng). Số tiền lãi bác An nhận được là $522{,}955 - 500 = 22{,}955$ (triệu đồng). Vậy, bác An nên chọn Phương án 2 thì có lợi hơn (số tiền lãi nhận được cao hơn).
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

Tiết 3

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
3. LẠM PHÁT **a) Khái niệm lạm phát, tỉ lệ lạm phát**		
Đoạn mở đầu	Giới thiệu các khái niệm: lạm phát, tỉ lệ lạm phát.	– GV giải thích cho HS các khái niệm: lạm phát và tỉ lệ làm phát, ý nghĩa của tỉ lệ lạm phát. – Nếu có điều kiện, GV có thể cung cấp số liệu về tỉ lệ lạm phát trong vài năm gần đây của Việt Nam và một vài nước để HS có thể hình dung phần nào.
Ví dụ 3	Rèn luyện kĩ năng áp dụng công thức tính sức mua theo tỉ lệ lạm phát.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Luyện tập 3	Củng cố kĩ năng áp dụng công thức tính sức mua theo tỉ lệ lạm phát.	HS tự làm tại lớp. *HD*. Gọi P là số tiền ban đầu. Ta có: $A=\frac{P}{2}; g=4\%=0{,}04.$ Do đó, ta có: $\frac{P}{2}=P(1-g)^n$. Thay số, ta được: $\frac{1}{2}=(1-0{,}04)^n=0{,}96^n$. Suy ra $n=\log_{0{,}96}\frac{1}{2}\approx 17$. Vậy sau khoảng 17 năm, sức mua sẽ giảm xuống chỉ còn một nửa.
b) Các giá trị thực chất có tính đến lạm phát		
Công thức tính lãi suất thực	Cho HS làm quen với cách xây dựng công thức tính lãi suất thực.	GV giới thiệu công thức tính lãi suất thực. Lưu ý cho HS là lãi suất mà các tổ chức tín dụng công bố thường gọi là *lãi suất danh nghĩa* hoặc *lãi suất niêm yết*; các lãi suất này

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

		thì luôn dương. Nhưng *lãi suất thực* (sau khi đã tính đến yếu tố lạm phát) thì có thể dương hoặc cũng có thể âm, tuỳ theo tỉ lệ lạm phát.
Ví dụ 4	Rèn luyện kĩ năng áp dụng công thức tính lãi suất thực và hiểu thu nhập thực, sau khi đã tính đến lạm phát.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Luyện tập 4	Củng cố kĩ năng áp dụng công thức tính lãi suất thực và hiểu thu nhập thực, sau khi đã tính đến lạm phát.	HS tự làm tại lớp. *HD*. Ta có: $P = 500$ (triệu đồng); $r = 9\% = 0{,}09$; $g = 7\% = 0{,}07$. a) Lãi suất thực cho khoản đầu tư của anh Nam là $r_{\text{thực}} = \dfrac{r-g}{1+g} = \dfrac{0{,}09-0{,}07}{1+0{,}07} \approx 0{,}019.$ Vậy thu nhập thực của anh Nam là $500 \cdot 0{,}019 = 9{,}5$ (triệu đồng). b) Lãi suất thực sau thuế khi chưa tính lạm phát là $r_{\text{sau thuế}} = 9\%(100\% - 10\%) = 8{,}1\% = 0{,}081.$ Do đó thu nhập thực sau khi tính thuế là $500 \cdot \dfrac{0{,}081-0{,}07}{1+0{,}07} \approx 5{,}14$ (triệu đồng).

3. Lựa chọn bài tập

- Vận dụng công thức lãi đơn: Bài tập 3.1, 3.2, 3.3.
- Vận dụng công thức lãi kép: Bài tập 3.4.
- Vận dụng công thức tính sức mua và tính lãi suất thực: Bài tập 3.5.
- Tìm hiểu liên hệ giữa chỉ số giá tiêu dùng *CPI* và tỉ lệ lạm phát: Bài tập 3.6.
- Tuỳ tình hình thực tế của lớp học, GV có thể lựa chọn thêm các bài tập phù hợp trong các tài liệu tham khảo khác.

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

IV ĐÁP SỐ/HƯỚNG DẪN/LỜI GIẢI BÀI TẬP

3.1. Ta có: $P = 900$ (triệu đồng); $t = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ (năm); $I = 54$ (triệu đồng). Do đó lãi suất đơn của khoản vay là $r = \frac{I}{Pt} = \frac{54}{900 \cdot \frac{1}{2}} = 0{,}12 = 12\%$.

3.2. Ta có: $I = 105 - 100 = 5$ (triệu đồng); $P = 100$ (triệu đồng); $r = 11\% = 0{,}11$. Do đó $t = \frac{I \cdot 365}{Pr} = \frac{5 \cdot 365}{100 \cdot 0{,}11} \approx 165{,}9$ (ngày). Vậy sau 166 ngày gửi thì 100 triệu đồng sẽ tích luỹ được thành 105 triệu đồng.

3.3. Ta có: $A = 100$ (tỉ đồng); $P = 96$ (tỉ đồng); $t = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ (năm).

Lãi suất đơn mà ngân hàng A được hưởng là

$$r = \frac{A - P}{Pt} = \frac{100 - 96}{96 \cdot \frac{3}{4}} \approx 0{,}056 = 5{,}6\%.$$

3.4. Ta có: $P = 200$ (triệu đồng); $t = 5$ (năm); $r = 9\% = 0{,}09$.

a) Khi tính lãi kép hằng năm thì $n = 1$. Do đó số tiền thu được là

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = 200\left(1 + \frac{0{,}09}{1}\right)^{5} \approx 307{,}725 \text{ (triệu đồng).}$$

Số tiền lãi nhận được là $307{,}725 - 200 = 107{,}725$ (triệu đồng).

b) Khi tính lãi kép hằng quý thì $n = 4$. Do đó số tiền thu được là

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = 200\left(1 + \frac{0{,}09}{4}\right)^{20} \approx 312{,}102 \text{ (triệu đồng).}$$

Số tiền lãi nhận được là $312{,}102 - 200 = 112{,}102$ (triệu đồng).

3.5. a) Ta có: $P = 10$ (triệu đồng); $g = 3{,}5\% = 0{,}035$; $n = 1$ (năm).

Khi đó $A = P(1 - g)^n = 10(1 - 0{,}035)^1 = 9{,}65$ (triệu đồng).

Vậy sau 1 năm thì sức mua của 10 triệu đồng sẽ chỉ còn 9,65 triệu đồng.

b) Lãi suất thực của khoản gửi tiết kiệm đó là

$$r_{\text{thực}} = \frac{r - g}{1 + g} = \frac{0{,}08 - 0{,}035}{1 + 0{,}035} \approx 0{,}043.$$

Vậy thu nhập thực (tức là tiền lãi đã tính đến yếu tố lạm phát) của khoản gửi tiết kiệm đó là

$$I = 600 \cdot \left(1 + r_{\text{thực}}\right) - 600 = 600 \cdot r_{\text{thực}} = 600 \cdot 0{,}043 = 25{,}8 \text{ (triệu đồng).}$$

3.6. a) Ta có $CPI_0 = 100$; $CPI = 118{,}09$; $n = 6$. Khi đó

$$g = \sqrt[n]{\frac{CPI}{CPI_0}} - 1 = \sqrt[6]{\frac{118{,}09}{100}} - 1 \approx 0{,}028 = 2{,}8\%.$$

Vậy tỉ lệ lạm phát trung bình hằng năm trong giai đoạn này là 2,8%.

b) Ta có $CPI_0 = 100$, $CPI = 115$. Khi đó $n = \log_{1+g} \frac{CPI}{CPI_0} = \log_{1{,}028} \frac{115}{100} \approx 5$ (năm).

Vậy vào năm 2019 thì *CPI* đạt 115.

c) Ta có $CPI_0 = 118{,}09$; $g = 0{,}0321$. Khi đó *CPI* vào tháng 1 năm 2030 (n = 10) là

$CPI = CPI_0\left(1+g\right)^n = 118{,}09\left(1+0{,}0321\right)^{10} \approx 161{,}97.$

d) Ta có $g = 0{,}03$; $CPI = 2CPI_0$. Khi đó $n = \log_{1+g} \frac{CPI}{CPI_0} = \log_{1{,}03} 2 \approx 23{,}45$.

Vậy sau khoảng 24 năm thì chỉ số *CPI* tăng gấp đôi.

Bài 6. TÍN DỤNG. VAY NỢ (3 tiết)

I MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Tính được lãi suất được hưởng hoặc lãi suất cần trả cho thẻ tín dụng, phí sử dụng thẻ (bao gồm các giao dịch).
- Nhận biết được kết quả của việc trả các khoản nợ đúng hạn, bao gồm hồ sơ tín dụng và giá trị tín dụng.
- Vận dụng được kiến thức toán học trong việc giải quyết một số vấn đề vay nợ của các tổ chức tín dụng.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Rèn luyện năng lực tư duy và lập luận toán học, năng lực mô hình hoá toán học và năng lực giải quyết vấn đề toán học thông qua việc mô hình hoá những vấn đề thực tiễn liên quan đến thẻ tín dụng và vay nợ.

– Bồi dưỡng hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

II NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

– Về mặt nội dung, bài học này giới thiệu khái niệm thẻ tín dụng, phí sử dụng thẻ tín dụng và những hình thức vay nợ phổ biến của các tổ chức tín dụng.

– Chuẩn bị:

+ GV tìm hiểu về thẻ tín dụng, cách tính và các loại lãi suất của thẻ tín dụng, các hình thức phổ biến và lãi suất cho vay của các ngân hàng lớn tại thời điểm thực hiện bài dạy.

+ HS chuẩn bị máy tính cầm tay.

III GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

Gợi ý phân phối thời gian dạy học: 3 tiết. Cụ thể như sau:

– Tiết 1: Mục 1. Thẻ tín dụng và phí sử dụng thẻ.

– Tiết 2: Mục 2. Vay nợ của các tổ chức tín dụng (mục a)-b)).

– Tiết 3: Mục 2. Vay nợ của các tổ chức tín dụng (mục c)) và chữa bài tập cuối bài học.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Tình huống mở đầu	Giúp HS có hứng thú và gợi động cơ với nội dung bài học.	GV nêu bài toán thực tế để kích thích nhu cầu học tập cho HS.
1. THẺ TÍN DỤNG VÀ PHÍ SỬ DỤNG THẺ **a) Thẻ tín dụng và chức năng của thẻ tín dụng**		
	Giới thiệu khái niệm thẻ tín dụng và các chức năng của thẻ tín dụng.	– GV giải thích cho HS khái niệm thẻ tín dụng, các cách phân loại thẻ tín dụng và các chức năng của thẻ tín dụng. – Thẻ tín dụng là một công cụ tài chính thông dụng cho phép chủ thẻ chi tiêu trước, trả tiền sau và khá phổ biến hiện nay.

b) Phí sử dụng thẻ tín dụng		
Đoạn mở đầu	Giới thiệu cách tính phí sử dụng thẻ tín dụng.	– GV giải thích cẩn thận cho HS các khái niệm liên quan đến thẻ tín dụng: thời hạn thanh toán, thời gian miễn lãi, các loại lãi suất của thẻ tín dụng. Đây là những khái niệm khó. – GV nhấn mạnh những lưu ý khi sử dụng thẻ tín dụng.
Ví dụ 1	HS làm quen với việc tính lãi suất của thẻ tín dụng khi giao dịch thanh toán hàng hoá, dịch vụ.	– HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV. – Cách tính lãi suất của thẻ tín dụng có thể là tương đối phức tạp đối với HS, do đó GV cần giải thích chi tiết.
Luyện tập 1	HS củng cố kĩ năng tính lãi suất của thẻ tín dụng khi giao dịch thanh toán hàng hoá, dịch vụ.	– HS làm việc tại lớp. – GV hỗ trợ HS khi cần. *HD.* Ta có: Dư nợ 1 (từ ngày 8/6 đến ngày 14/6) là 5 triệu đồng; Dư nợ 2 (từ ngày 15/6 đến ngày 29/6) là 7 triệu đồng; Dư nợ 3 (từ ngày 1/7 đến ngày 15/7) là 6 triệu đồng. Chị Hương đã thanh toán đủ số dư nợ tối thiểu và dư nợ tại thời điểm ngày 15/7 vẫn còn 6 triệu đồng. Do đó số tiền lãi sẽ bị tính bao gồm: – Với Dư nợ 1, số tiền lãi là: $5\,000\,000 \cdot \frac{20\%}{365} \cdot 7 = 19\,178$ (đồng). – Với Dư nợ 2, số tiền lãi là: $7\,000\,000 \cdot \frac{20\%}{365} \cdot 15 = 57\,534$ (đồng). – Với Dư nợ 3, số tiền lãi là: $6\,000\,000 \cdot \frac{20\%}{365} \cdot 15 \approx 49\,315$ (đồng).

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

		Vậy tổng số tiền lãi mà chị Hương cần phải thanh toán khi đến hạn 15/7 là: $19\,178+57\,534+49\,315=126\,027$ (đồng). Ngoài ra, số tiền 6 triệu đồng vẫn bị tính tiếp lãi cho tới thời điểm chị Hương thanh toán trả ngân hàng.
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 2

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
2. VAY NỢ CỦA CÁC TỔ CHỨC TÍN DỤNG **a) Vay theo hình thức lãi đơn**		
Đoạn mở đầu	Nhắc lại các công thức cần thiết liên quan đến lãi đơn.	GV nhắc lại các công thức cần thiết liên quan đến lãi đơn và lưu ý cho HS là lãi đơn thường được dùng cho các khoản vay ngắn hạn.
Ví dụ 2	Rèn luyện kĩ năng vận dụng công thức lãi đơn để tính số tiền lãi và số tiền phải trả của một khoản vay theo hình thức lãi đơn.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Luyện tập 2	Củng cố kĩ năng vận dụng công thức lãi đơn để tính số tiền lãi và số tiền phải trả của một khoản vay theo hình thức lãi đơn.	HS tự làm tại lớp. *HD.* Ta có: $P=1$ (tỉ đồng); $t=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ (năm); $r=9\%=0,09$. Số tiền mà công ty phải trả cho ngân hàng là $A=1\cdot\left(1+0,09\cdot\frac{1}{3}\right)=1,03$ (tỉ đồng).
b) Vay theo hình thức lãi kép		
Ví dụ 3	Rèn luyện kĩ năng áp dụng công thức tính lãi kép.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.

Luyện tập 3	Củng cố kĩ năng áp dụng công thức tính lãi kép.	HS tự làm tại lớp. *HD.* Ta có: $P=100$ (triệu đồng); $r=0,12;\ t=2$ (năm). a) Ở đây $n=4$. Do đó tổng số tiền phải trả là $A=100\cdot\left(1+\frac{0,12}{4}\right)^{8}\approx 126,677$ (triệu đồng). Số tiền lãi tương ứng là $126,677-100=26,677$ (triệu đồng). b) Ở đây $n=12$. Do đó tổng số tiền phải trả là $A=100\cdot\left(1+\frac{0,12}{12}\right)^{24}\approx 126,973$ (triệu đồng). Số tiền lãi tương ứng là $126,973-100=26,973$ (triệu đồng).
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 3

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
2. VAY NỢ CỦA CÁC TỔ CHỨC TÍN DỤNG (tiếp) **c) Vay trả góp**		
Đoạn mở đầu	Giới thiệu khái niệm vay trả góp và công thức tính khoản thanh toán của mỗi kì trả góp.	– GV giải thích cho HS các khái niệm: trả góp, khoản thanh toán. – GV nhắc lại công thức mua trả góp ở trang 127 SGK Toán 11, tập một cho HS. Từ đó yêu cầu HS suy ra công thức tính khoản thanh toán của mỗi kì trả góp.

Ví dụ 4	Rèn luyện kĩ năng áp dụng công thức trả góp.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Luyện tập 4	Củng cố kĩ năng áp dụng công thức trả góp.	– HS tự làm ở lớp. – GV giúp đỡ HS khi cần. *HD.* Ta có: $V = 2\,400$ (triệu đồng); $i = \frac{0,06}{12} = 0,005;\ n = 30 \cdot 12 = 360.$ a) Khoản thanh toán hằng tháng là $P = 2\,400 \cdot \frac{0,005}{1-(1+0,005)^{-360}} \approx 14,389$ (triệu đồng). b) Tổng số tiền mà vợ chồng anh Tùng phải trả là $14,389 \cdot 360 = 5\,180,04$ (triệu đồng). Vậy tổng số tiền trả lãi của họ là $5\,180,04 - 2\,400 = 2\,780,04$ (triệu đồng). c) Sau 20 năm (tức là 240 kì trả góp), vốn chủ sở hữu căn nhà của họ là $600 + 14,389 \cdot 240 = 4\,053,36$ (triệu đồng).
Vận dụng	Củng cố kĩ năng áp dụng công thức trả góp	HS tự làm tại lớp. *HD.* Ta có: $V = 500$ (triệu đồng); $i = \frac{7,4\%}{12} \approx 0,00617;\ n = 60.$ a) Khoản thanh toán hằng tháng là $P = V \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$ $= 500 \cdot \frac{0,00617}{1-(1+0,00617)^{-60}} \approx 9,996$ (triệu đồng). b) Tổng số tiền mà anh Hùng phải trả là $9,996 \cdot 60 = 599,76$ (triệu đồng).

		c) Vậy số tiền trả lãi là: $599{,}76 - 500 = 99{,}76$ (triệu đồng).
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

3. Lựa chọn bài tập

- Tính chi phí sử dụng thẻ tín dụng: Bài tập 3.7, 3.8.
- Vận dụng công thức lãi đơn và công thức lãi kép: Bài tập 3.9, 3.10, 3.11
- Vận dụng công thức trả góp: Bài tập 3.12.
- Tuỳ tình hình thực tế của lớp học, GV có thể lựa chọn thêm các bài tập phù hợp trong các tài liệu tham khảo khác.

IV ĐÁP SỐ/HƯỚNG DẪN/LỜI GIẢI BÀI TẬP

3.7. a) Các khoản phí mà chị Hương phải trả:

– Phí rút tiền mặt: $5\,000\,000 \cdot 3\% = 150\,000$ (đồng).

– Lãi suất từ ngày 1/6 đến ngày 20/7 là

$$5\,000\,000 \cdot \frac{20\%}{365} \cdot 50 = 136\,986 \text{ (đồng).}$$

Vậy tổng chi phí mà chị Hương phải trả khi rút tiền mặt tại cây ATM là:

$150\,000 + 136\,986 = 286\,986$ (đồng).

b) Lãi suất đơn của khoản vay đó là:

$$r = \frac{I \cdot 365}{Pt} = \frac{286\,986 \cdot 365}{5\,000\,000 \cdot 50} \approx 0{,}419 = 41{,}9\%.$$

Lãi suất này là rất cao. Do đó, chúng ta nên hạn chế việc dùng thẻ tín dụng để rút tiền mặt tại cây ATM.

3.8. Ta có: $P = 5$ (triệu đồng); $r = 1{,}25\% \cdot 12 = 0{,}15$; $n = 12$; $t = 6$ (tháng) $= 0{,}5$ (năm).

Do đó $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = 5\left(1 + \frac{0{,}15}{12}\right)^{6} \approx 5{,}387$ (triệu đồng).

Vậy hoá đơn lúc đó là 5,387 triệu đồng.

Chú ý. Vì việc tính lãi hằng tháng và lãi suất là $r = 1{,}25\% = 0{,}0125$ mỗi tháng, nên sau 6 tháng ta có 6 kì tính lãi, do đó ta cũng có thể dùng trực tiếp công thức:

$$A = P(1+r)^n = 5(1+0{,}0125)^6 \approx 5{,}387 \text{ (triệu đồng).}$$

3.9. Ta có: $P = 100$ (triệu đồng); $r = 9\% = 0{,}09$; $t = \frac{6}{12} = 0{,}5$ (năm).

a) Khi việc tính lãi diễn ra theo thể thức lãi đơn thì tổng số tiền chị Dung cần trả là

$$A = P(1+rt) = 100 \cdot (1+0{,}09 \cdot 0{,}5) = 104{,}5 \text{ (triệu đồng).}$$

Số tiền lãi chị Dung cần trả là: $104{,}5 - 100 = 4{,}5$ (triệu đồng).

b) Khi việc tính lãi diễn ra theo thể thức lãi kép hằng tháng thì $n = 12$. Do đó tổng số tiền chị Dung cần trả là

$$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = 100 \cdot \left(1+\frac{0{,}09}{12}\right)^{12 \cdot 0{,}5} \approx 104{,}585 \text{ (triệu đồng).}$$

Số tiền lãi chị Dung cần trả là: $104{,}585 - 100 = 4{,}585$ (triệu đồng).

3.10. Ta tính số tiền lãi phải trả theo từng phương án:

– Với khoản vay lãi kép kì hạn 3 tháng với lãi suất 8% một năm, ta có:

$$P = 500 \text{ (triệu đồng)}; r = 8\% = 0{,}08; t = \frac{9}{12} = 0{,}75; n = 4.$$

Do đó tổng số tiền phải trả là

$$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = 500\left(1+\frac{0{,}08}{4}\right)^{4 \cdot 0{,}75} = 530{,}604 \text{ (triệu đồng).}$$

Khi đó số tiền lãi cần trả là: $530{,}604 - 500 = 30{,}604$ (triệu đồng).

–Với khoản vay lãi đơn 8,5% một năm, ta có:

$$P = 500; r = 8{,}5\% = 0{,}085; t = \frac{9}{12} = 0{,}75.$$

Do đó số tiền lãi cần trả là $I = Prt = 500 \cdot 0{,}085 \cdot 0{,}75 = 31{,}875$ (triệu đồng).

Vậy để trả lãi ngân hàng ít hơn, anh Hải nên chọn khoản vay lãi kép kì hạn 3 tháng với lãi suất 8% một năm.

3.11. Ta có $P = 800$ (triệu đồng); $t = 5$ (năm).

a) Với $r = 0{,}06$ và tính lãi đơn hằng năm thì tổng số tiền cần trả là

$$A = P(1+rt) = 800(1+0{,}06 \cdot 5) = 1\,040 \text{ (triệu đồng).}$$

Khi đó số tiền lãi phải trả là: $1\,040-800=240$ (triệu đồng).

b) Với $r=0{,}055$ và tính lãi kép hằng tháng ($n=12$) thì tổng số tiền cần trả là

$$A=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}=800\left(1+\frac{0{,}055}{12}\right)^{60}\approx 1\,052{,}563 \text{ (triệu đồng).}$$

Khi đó số tiền lãi phải trả là: $1052{,}563-800=252{,}563$ (triệu đồng).

Vậy anh Tùng nên chọn khoản vay với lãi suất 6% mỗi năm, tính lãi đơn hằng năm để số tiền lãi phải trả là ít hơn.

3.12. a) Ta có $V=600$ (triệu đồng); $n=72$; $i=\frac{0{,}069}{12}=0{,}00575$.

Do đó khoản thanh toán hằng tháng của chị Dung là

$$P=V\cdot\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}=600\cdot\frac{0{,}00575}{1-(1+0{,}00575)^{-72}}\approx 10{,}2 \text{ (triệu đồng).}$$

b) Tổng số tiền chị Dung phải trả là $10{,}2\cdot 72=734{,}4$ (triệu đồng).

c) Số tiền lãi chị Dung phải trả là $734{,}4-600=134{,}4$ (triệu đồng).

Bài 7. ĐẦU TƯ TÀI CHÍNH. LẬP KẾ HOẠCH TÀI CHÍNH CÁ NHÂN (3 tiết)

I MỤC TIÊU

1. Về kiến thức, kĩ năng

- Thiết lập được kế hoạch tài chính cá nhân cho các nhu cầu dài hạn như giáo dục hoặc sống tự lập.
- Vận dụng được kiến thức toán học trong việc giải quyết một số vấn đề về đầu tư.

2. Về năng lực, phẩm chất

- Rèn luyện năng lực tư duy và lập luận toán học, năng lực mô hình hoá toán học và năng lực giải quyết vấn đề toán học thông qua việc mô hình hoá những vấn đề thực tiễn liên quan đến thiết lập kế hoạch tài chính cá nhân hay đầu tư.
- Bồi dưỡng hứng thú học tập, ý thức làm việc nhóm, ý thức tìm tòi, khám phá và sáng tạo cho HS.

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

II NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

– Về mặt nội dung, bài học này giới thiệu những khái niệm và công thức cơ bản liên quan đến đầu tư và lập kế hoạch tài chính cá nhân.

– Chuẩn bị:

+ GV chuẩn bị một số tình huống trong thực tế liên quan đến đầu tư, niên kim; tìm hiểu lãi suất thực tế của hình thức gửi tiết kiệm tích luỹ của một số ngân hàng lớn tại thời điểm thực hiện bài dạy.

+ HS chuẩn bị máy tính cầm tay hoặc máy tính có cài đặt phần mềm Excel. GV hướng dẫn HS tự đọc phần **Em có biết?** ở cuối bài để tìm hiểu cách dùng máy tính cầm tay hoặc Excel tính số hạng nào đó của một dãy số cho bởi hệ thức truy hồi.

III GỢI Ý DẠY HỌC

1. Thời lượng

Gợi ý phân phối thời gian dạy học: 3 tiết. Cụ thể như sau:

– Tiết 1: Mục 1. Một số vấn đề về đầu tư; Mục 2. Giải quyết một số vấn đề về đầu tư.

– Tiết 2: Mục 3. Lập kế hoạch tài chính cá nhân (đến hết Luyện tập 6).

– Tiết 3: Mục 3. Lập kế hoạch tài chính cá nhân (phần còn lại) và chữa bài tập cuối bài học.

2. Thực hiện các hoạt động chính của bài học

Tiết 1

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
Tình huống mở đầu	Giúp HS có hứng thú và gợi động cơ với nội dung bài học.	GV nêu tình huống để kích thích nhu cầu học tập cho HS.
1. MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ ĐẦU TƯ		
Nội dung Mục 1	Giới thiệu khái niệm đầu tư và những hình thức đầu tư phổ biến.	GV có thể cho HS thảo luận tự tìm hiểu, trước khi trình bày một cách hệ thống như trong sách.
2. GIẢI QUYẾT MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ ĐẦU TƯ **a) Xác định lãi suất của một khoản đầu tư**		

Công thức tính lãi suất của một khoản đầu tư	Cho HS làm quen với từng bước xây dựng công thức tính lãi suất r.	– HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV xây dựng công thức tính lãi suất r. – GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức.
Ví dụ 1	Rèn luyện kĩ năng áp dụng công thức tính lãi suất r.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Luyện tập 1	Củng cố kĩ năng áp dụng công thức tính lãi suất.	HS tự làm tại lớp. *HD.* Gọi P là số tiền vốn ban đầu. Ta có: $A = 2P$; $n = 4$; $N = 20$. Khi đó lãi suất năm của khoản đầu tư là $r = n\left(\sqrt[N]{\frac{A}{P}} - 1\right) = 4\left(\sqrt[20]{\frac{2P}{P}} - 1\right)$ $\approx 0{,}141 = 14{,}1\%$.
b) Xác định thời gian cho một khoản đầu tư		
Công thức xác định thời gian cho một khoản đầu tư	Cho HS làm quen với từng bước xây dựng công thức tính thời gian cho một khoản đầu tư.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV xây dựng công thức tính thời gian cho một khoản đầu tư.
Ví dụ 2	Rèn luyện kĩ năng áp dụng công thức tính thời gian cho một khoản đầu tư.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Luyện tập 2	Củng cố kĩ năng áp dụng công thức tính thời gian cho một khoản đầu tư.	HS tự làm tại lớp. *HD.* Gọi P là số tiền vốn ban đầu. Ta có: $A = 2P$; $n = 12$; $r = 10\% = 0{,}1$. Khi đầu tư theo thể thức lãi kép theo định kì và tính lãi hằng tháng thì số kì đầu tư cần thiết là: $N = \log_{1+\frac{r}{n}} \frac{A}{P} \approx 83{,}523$. Khi đó ta chọn $N = 84$ tháng, tức là 7 năm.

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

		Vậy sau 7 năm thì khoản đầu tư đó sẽ tăng gấp đôi giá trị.
Ví dụ 3	Rèn luyện kĩ năng quy đổi lãi suất đang hưởng về lãi suất đơn năm (để so sánh các khoản đầu tư) và tính thời gian cần thiết để từ số tiền ban đầu đạt số tiền mong muốn.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Luyện tập 3	Củng cố kĩ năng áp dụng công thức lãi kép và quy đổi lãi suất đang hưởng về lãi suất đơn năm.	HS làm việc tại lớp. *HD.* a) Ta có: $P=200$ (triệu đồng); $r=5\%=0,05$; $t=10$ (năm); $n=1$. Giá trị tài khoản vào ngày 1/1/2030 là $A=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}=200\cdot\left(1+0,05\right)^{10}\approx 325,779$ (triệu đồng). b) Tổng số tiền lãi nhận được trong 10 năm là $325,779-200=125,779$ (triệu đồng). Số tiền lãi trung bình trong một năm là $125,779:10=12,5779$ (triệu đồng). Vậy lãi suất đơn hằng năm của khoản gửi này là $\frac{12,5779}{200}\approx 0,063=6,3\%$.
c) Xác định giá trị hiện tại của một khoản tiền		
HĐ. Xây dựng công thức tính giá trị hiện tại của một khoản tiền	Xây dựng công thức tính giá trị hiện tại của một khoản tiền được đầu tư theo thể thức lãi kép theo định kì.	– HS thực hiện lần lượt các yêu cầu của HĐ. GV giúp đỡ HS khi cần. – GV ghi bảng hoặc trình chiếu nội dung trong khung kiến thức.
Ví dụ 4	Rèn luyện kĩ năng tính giá trị hiện tại của một khoản tiền.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

Luyện tập 4	Rèn luyện kĩ năng tính giá trị hiện tại của một khoản tiền.	HS làm việc tại lớp. *HD.* Ta có: $A = 100$ (triệu đồng); $t = 10$ (năm); $r = 6\% = 0{,}06$; $n = 12$. Do đó số tiền cần bỏ ra để mua bây giờ là $P = 100 \cdot \left(1 + \frac{0{,}06}{12}\right)^{-120} \approx 54{,}963$ (triệu đồng).
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 2

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
3. LẬP KẾ HOẠCH TÀI CHÍNH CÁ NHÂN		
Giới thiệu các bước lập kế hoạch tài chính cá nhân	Giới thiệu khái niệm, vai trò và các bước lập kế hoạch tài chính cá nhân.	Nên cho HS thảo luận tìm hiểu trước, sau đó GV mới tổng kết lại một cách hệ thống.
Ví dụ 5	Làm quen với việc lập kế hoạch tài chính cá nhân, qua một tình huống cụ thể.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Các công thức toán học liên quan đến niên kim	Nhắc lại khái niệm niên kim và các công thức liên quan đến niên kim.	– GV giải thích cho HS các khái niệm: niên kim, số tiền của niên kim, giá trị hiện tại của niên kim. – GV ghi bảng hoặc trình chiếu các công thức cần thiết.
Ví dụ 6	Rèn luyện kĩ năng áp dụng công thức tính số tiền của một niên kim.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Luyện tập 5	Củng cố kĩ năng áp dụng công thức tính số tiền của một niên kim.	HS tự làm tại lớp. *HD.* Ta có: $P = 36$ (triệu đồng); $n = 30$; $i = 6\% = 0{,}06$.

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

		Vậy giá trị của tài khoản khi anh Nam gửi tiền lần thứ 30 là $A = 36 \cdot \frac{(1+0,06)^{30} - 1}{0,06} \approx 2\,846,095$ (triệu đồng).
Ví dụ 7	Rèn luyện kĩ năng áp dụng công thức tính giá trị hiện tại của niên kim.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Luyện tập 6	Củng cố kĩ năng áp dụng công thức tính giá trị hiện tại của niên kim để giải quyết bài toán *ở tình huống mở đầu.*	HS tự làm tại lớp. *HD.* Ta có: $P = 500$ (triệu đồng); $n = 10; i = 10\% = 0,1.$ Vậy giá trị hiện tại của số tiền trúng thưởng (5 tỉ đồng) chỉ là $V = 500 \cdot \frac{1-(1+0,1)^{-10}}{0,1} \approx 3\,072,284$ (triệu đồng).
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

Tiết 3

HOẠT ĐỘNG	MỤC ĐÍCH, YÊU CẦU	GỢI Ý THỰC HIỆN
3. LẬP KẾ HOẠCH TÀI CHÍNH CÁ NHÂN (tiếp)		
Ví dụ 8	Rèn luyện kĩ năng áp dụng công thức niên kim để tính số kì gửi cần thiết của hình thức tiết kiệm tích luỹ (với số tiền gửi mỗi kì xác định và không đổi) để đạt tổng số tiền tích luỹ mong muốn.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

Ví dụ 9	Rèn luyện kĩ năng thiết lập và áp dụng công thức truy hồi cho niên kim để đạt số tiền tích luỹ mong muốn.	HS làm việc dưới sự hướng dẫn của GV.
Luyện tập 7	Củng cố kĩ năng thiết lập và áp dụng công thức truy hồi cho niên kim.	– HS tự làm tại lớp. – GV giúp đỡ HS nếu cần. *HD.* Ta có: $P = 6$ triệu đồng; $r = 8\% = 0{,}08$. a) Gọi A_n là số tiền (triệu đồng) trong tài khoản của bạn Nam sau n quý, ta có $A_1 = 6$; $A_n = \left(1 + \frac{0{,}08}{4}\right) A_{n-1} + 6 = 1{,}02A_{n-1} + 6 \ (n \geq 2)$. b) Sử dụng máy tính bỏ túi, ta tính được: $A_{49} \approx 491{,}644$ (triệu đồng), $A_{50} \approx 507{,}476$ (triệu đồng). Như vậy, sẽ mất 49 quý trước khi giá trị của tài khoản vượt quá 500 triệu đồng. c) Ta có $n = 100$, khi đó giá trị của tài khoản là $A_{100} \approx 1\,873{,}39$ (triệu đồng).
Chữa bài tập	Chữa một số bài tập cuối bài học.	GV lựa chọn một số bài tập cuối bài học và cho HS chữa, tuỳ theo dụng ý sư phạm của mình.
Tổng kết	Dành cho dự phòng, tổng kết lại nội dung của tiết học, dặn dò công việc về nhà.	GV sử dụng tuỳ tình hình thực tế của lớp học.

3. Lựa chọn bài tập

- Vận dụng công thức tính lãi kép: Bài tập 3.13.
- Vận dụng công thức tính niên kim để giải quyết vấn đề gửi tiết kiệm tích luỹ: Bài tập 3.14, 3.15.
- Vận dụng công thức tính giá trị hiện tại của một niên kim: Bài tập 3.16.
- Lập kế hoạch tích luỹ số tiền cần thiết: Bài tập 3.17, 3.18.
- Tuỳ tình hình thực tế của lớp học, GV có thể lựa chọn thêm các bài tập phù hợp trong các tài liệu tham khảo khác.

IV ĐÁP SỐ/HƯỚNG DẪN/LỜI GIẢI BÀI TẬP

3.13. Ta có: $A = 100$ (triệu đồng); $t = 5$ (năm); $r = 1\% \cdot 12 = 12\% = 0{,}12$; $n = 12$.

Khi đó số tiền để mua trái phiếu là $P = A\left(1+\frac{r}{n}\right)^{-nt} \approx 55{,}045$ (triệu đồng).

3.14. Ta có: $P = 50$ (triệu đồng); $n = 15$; $i = 5\% = 0{,}05$.

Số tiền của niên kim sau 15 lần gửi là

$$A = P \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 50 \cdot \frac{(1+0{,}05)^{15} - 1}{0{,}05} \approx 1\,078{,}928 \text{ (triệu đồng)}.$$

3.15. Ta có: $P = 1$ (triệu đồng); $i = \frac{0{,}06}{12} = 0{,}005$; $A = 100$ (triệu đồng).

Ta có $A = P \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$ nên $n = \log_{1+i}\left(\frac{Ai}{P}+1\right) \approx 81{,}3$.

Vậy sau khoảng 6 năm 10 tháng sẽ tiết kiệm được 100 triệu đồng.

3.16. Ta có: $P = 5$ (triệu đồng); $n = 48$; $i = \frac{0{,}06}{12} = 0{,}005$.

Khi đó giá trị hiện tại của niên kim là

$$V = P \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 5 \cdot \frac{1-(1+0{,}005)^{-48}}{0{,}005} \approx 212{,}9 \text{ (triệu đồng)}.$$

3.17. a) Ta có: $P = 1{,}5$ (triệu đồng); $i = 0{,}004$; $n = 12$.

Tổng số tiền anh Dương có sau 12 tuần là

$$A = P \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 1{,}5 \cdot \frac{(1+0{,}004)^{12} - 1}{0{,}004} \approx 18{,}401 \text{ (triệu đồng)}.$$

b) Ta có: $V = 18{,}401$ (triệu đồng); $n = 36$ (tuần); $i = 0{,}004$.

Do đó số tiền anh Dương có thể rút mỗi tuần là

$$P = V \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 18{,}401 \cdot \frac{0{,}004}{1-(1+0{,}004)^{-36}} \approx 0{,}55 \text{ (triệu đồng)} = 550 \text{ (nghìn đồng)}.$$

3.18. Ta có: $A = 2\,000$ (triệu đồng); $n = 4$; $r = 2\% \cdot 4 = 8\% = 0{,}08$; $t = 4$.

Khi đó $P = A\left(1+\frac{r}{n}\right)^{-nt} = 2\,000\left(1+\frac{0{,}08}{4}\right)^{-16} \approx 1\,457$ (triệu đồng).

Vậy anh Nam và chị Hương cần gửi tiết kiệm 1 457 triệu đồng.

BÀI TẬP CUỐI CHUYÊN ĐỀ 3 (2 tiết)

I GỢI Ý DẠY HỌC

- GV hệ thống hoá kiến thức lí thuyết của chuyên đề (có thể chuẩn bị slide tổng kết kiến thức dạng sơ đồ hoá).
- GV hệ thống các dạng toán cơ bản và nhắc lại ngắn gọn phương pháp giải, cũng như những lưu ý cần thiết.
- Tuỳ tình hình thực tế của lớp, GV có thể cho HS chữa một số bài tập ở Bài tập cuối chuyên đề 3 theo dụng ý sư phạm của mình.

II ĐÁP SỐ/HƯỚNG DẪN/LỜI GIẢI BÀI TẬP

3.19. + Ta có: $P = 50$ (triệu đồng); $t = \frac{6}{12} = 0,5$; $r = 0,09$; $n = 4$. Do đó nếu chọn khoản vay lãi kép kì hạn 3 tháng với lãi suất 9% một năm thì số tiền anh Nam cần trả là

$$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = 50\left(1+\frac{0,09}{4}\right)^{4\cdot 0,5} \approx 52,275 \text{ (triệu đồng).}$$

+ Ta có: $P = 50$ (triệu đồng); $t = 0,5$; $r = 0,1$. Do đó nếu chọn khoản vay lãi suất đơn thì số tiền anh Nam cần trả là $A = P + Prt = 50 + 50 \cdot 0,1 \cdot 0,5 = 52,5$ (triệu đồng).

Vậy anh Nam nên chọn khoản vay lãi kép kì hạn 3 tháng với lãi suất 9% một năm để trả ít tiền lãi hơn.

3.20. Gọi số tiền ban đầu gửi vào là P.

Số tiền nhận được của ngân hàng A sau t năm là $A_1 = P\left(1+\frac{0,06}{365}\right)^{365t} \approx 1,0618^t P.$

Số tiền nhận được của ngân hàng B sau t năm là $A_2 = P\left(1+\frac{0,0602}{4}\right)^{4t} \approx 1,0616^t P.$

Vậy ngân hàng A đang cung cấp giao dịch tốt hơn.

3.21. Ta có $A = 2P$; $r = 0,08$.

a) Số kì gửi để giá trị một khoản đầu tư tăng gấp đôi khi tính lãi kép hằng tháng ($n = 12$) là $N = \log_{1+\frac{r}{n}} \frac{A}{P} = \log_{1+\frac{0,08}{12}} 2 \approx 104,32$. Vậy sau 105 tháng (8 năm 9 tháng) thì giá trị của khoản đầu tư tăng gấp đôi.

b) Số kì gửi để giá trị một khoản đầu tư tăng gấp đôi khi tính lãi kép hằng quý ($n = 4$) là $N = \log_{1+\frac{r}{n}} \frac{A}{P} = \log_{1+\frac{0,08}{4}} 2 \approx 35,003$. Vậy sau 36 kì gửi, tức là $36 \cdot 4 = 144$ tháng hay 12 năm thì giá trị của khoản đầu tư tăng gấp đôi.

3.22. a) Ta có: $P = 18$ (triệu đồng); $r = 0,08$; $n = 1$.

Học phí trung bình của trường trong năm học 2029 – 2030 ($t = 8$ năm) là

$$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = 18\left(1+0,08\right)^{8} \approx 33,317 \text{ (triệu đồng).}$$

b) Ta có $A = 33,317$ (triệu đồng); $r = 0,06$; $t = 8$ năm; $n = 1$, khi đó số tiền cần gửi vào đầu tháng 9 năm 2021 là $P = A\left(1+\frac{r}{n}\right)^{-nt} = 33,317\left(1+0,06\right)^{-8} \approx 20,903$ (triệu đồng).

3.23. Ta có: $A = 200$ (triệu đồng); $i = \frac{0,1}{4} = 0,025$; $n = 8$.

Ta có $A = P \cdot \frac{\left(1+i\right)^{n}-1}{i}$ nên $P = \frac{Ai}{\left(1+i\right)^{n}-1} = \frac{200 \cdot 0,025}{\left(1+0,025\right)^{8}-1} \approx 22,9$ (triệu đồng).

Vậy cần đầu tư mỗi quý 22,9 triệu đồng để sau hai năm có 200 triệu đồng.

3.24. a) Ta có: $V = 2\,000$ (triệu đồng); $n = 240$; $i = \frac{0,09}{12} = 0,0075$.

Số tiền họ phải trả mỗi tháng là

$$P = V \cdot \frac{i}{1-\left(1+i\right)^{-n}} = 2\,000 \cdot \frac{0,0075}{1-\left(1+0,0075\right)^{-240}} \approx 18 \text{ (triệu đồng).}$$

b) Tổng số tiền họ trả trong 20 năm là $18 \cdot 240 = 4\,320$ (triệu đồng).

c) Ta có: $P = 18$; $n = 240$; $i = \frac{0,09}{12} = 0,0075$.

Khi đó, số tiền mà cặp vợ chồng nhận được sau 20 năm là

$$A = P \cdot \frac{\left(1+i\right)^{n}-1}{i} = 18 \cdot \frac{\left(1+0,0075\right)^{240}-1}{0,0075} = 12\,021,964 \text{ (triệu đồng).}$$

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam xin trân trọng cảm ơn
các tác giả có tác phẩm, tư liệu được sử dụng, trích dẫn trong cuốn sách này.

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Chủ tịch Hội đồng thành viên – Tổng Giám đốc NGUYỄN TIẾN THANH

Chịu trách nhiệm nội dung:

Tổng biên tập PHẠM VĨNH THÁI

Biên tập nội dung: LƯU THẾ SƠN – ĐẶNG THỊ MINH THU

Thiết kế sách: VŨ XUÂN NHỰ

Trình bày bìa: NGUYỄN BÍCH LA

Sửa bản in: PHẠM THỊ TÌNH

Chế bản: CÔNG TY CP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI

Bản quyền thuộc Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

Tất cả các phần của nội dung cuốn sách này đều không được sao chép, lưu trữ, chuyển thể dưới bất kì hình thức nào khi chưa có sự cho phép bằng văn bản của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP TOÁN 12 – SÁCH GIÁO VIÊN

Mã số:

In ..... cuốn (QĐ .....), khổ 19 x 26,5cm.

In tại .....

Số ĐKXB: /CXBIPH/ /GD

Số QĐXB: ..... / QĐ-GD ngày ... tháng ... năm ....

Nộp lưu chiểu quý ..... năm ...

Mã số ISBN: 978-604-0-.....



HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH

BỘ SÁCH GIÁO VIÊN LỚP 12 – KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

1. Ngữ văn 12, tập một – SGV
2. Ngữ văn 12, tập hai – SGV
3. Chuyên đề học tập Ngữ văn 12 – SGV
4. Toán 12 – SGV
5. Chuyên đề học tập Toán 12 – SGV
6. Lịch sử 12 – SGV
7. Chuyên đề học tập Lịch sử 12 – SGV
8. Địa lí 12 – SGV
9. Chuyên đề học tập Địa lí 12 – SGV
10. Giáo dục kinh tế và pháp luật 12 – SGV
11. Chuyên đề học tập Giáo dục kinh tế và pháp luật 12 – SGV
12. Vật lí 12 – SGV
13. Chuyên đề học tập Vật lí 12 – SGV
14. Hoá học 12 – SGV
15. Chuyên đề học tập Hoá học 12 – SGV
16. Sinh học 12 – SGV
17. Chuyên đề học tập Sinh học 12 – SGV
18. Công nghệ 12 – Công nghệ Điện – Điện tử – SGV
19. Chuyên đề học tập Công nghệ 12 – Công nghệ Điện – Điện tử – SGV
20. Công nghệ 12 – Lâm nghiệp – Thuỷ sản – SGV
21. Chuyên đề học tập Công nghệ 12 – Lâm nghiệp – Thuỷ sản – SGV
22. Tin học 12 – SGV
23. Chuyên đề học tập Tin học 12 – Định hướng Tin học ứng dụng – SGV
24. Chuyên đề học tập Tin học 12 – Định hướng Khoa học máy tính – SGV
25. Mĩ thuật 12 – SGV
26. Chuyên đề học tập Mĩ thuật 12 – SGV
27. Âm nhạc 12 – SGV
28. Chuyên đề học tập Âm nhạc 12 – SGV
29. Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 12 – SGV
30. Giáo dục thể chất 12 – Bóng chuyền – SGV
31. Giáo dục thể chất 12 – Bóng đá – SGV
32. Giáo dục thể chất 12 – Cầu lông – SGV
33. Giáo dục thể chất 12 – Bóng rổ – SGV
34. Giáo dục quốc phòng và an ninh 12 – SGV
35. Tiếng Anh 12 – Global Success – SGV

Website: https://www.nxbgd.vn

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG