KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

CUNG THẾ ANH – NGUYỄN HUY ĐOAN (đồng Chủ biên)
NGUYỄN CAO CƯỜNG – TRẦN MẠNH CƯỜNG
DOÃN MINH CƯỜNG – TRẦN PHƯƠNG DUNG
SĨ ĐỨC QUANG – LƯU BÁ THẮNG – ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài tập TOÁN 9

TẬP MỘT



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

MỤC LỤC

NỘI DUNG	Trang	
	Đề bài	Lời giải - Hướng dẫn - Đáp số
CHƯƠNG I. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN	4	73
Bài 1. Khái niệm phương trình và hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn	4	73
Bài 2. Giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn	9	77
Bài 3. Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình	14	80
Ôn tập chương I	17	83
CHƯƠNG II. PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN	20	88
Bài 4. Phương trình quy về phương trình bậc nhất một ẩn	20	88
Bài 5. Bất đẳng thức và tính chất	24	89
Bài 6. Bất phương trình bậc nhất một ẩn	26	90
Ôn tập chương II	28	91
CHƯƠNG III. CĂN BẬC HAI VÀ CĂN BẬC BA	30	92
Bài 7. Căn bậc hai và căn thức bậc hai	30	92
Bài 8. Khai căn bậc hai với phép nhân và phép chia	33	94
Bài 9. Biến đổi đơn giản và rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai	35	95
Bài 10. Căn bậc ba và căn thức bậc ba	37	97
Ôn tập chương III	39	98
CHƯƠNG IV. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG	41	100
Bài 11. Tỉ số lượng giác của góc nhọn	41	100
Bài 12. Một số hệ thức giữa cạnh, góc trong tam giác vuông và ứng dụng	47	103
Ôn tập chương IV	50	106
CHƯƠNG V. ĐƯỜNG TRÒN	54	109
Bài 13. Mở đầu về đường tròn	54	109
Bài 14. Cung và dây của một đường tròn	57	110
Bài 15. Độ dài của cung tròn. Diện tích hình quạt tròn và hình vành khuyên	60	112
Bài 16. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn	63	113
Bài 17. Vị trí tương đối của hai đường tròn	66	116
Ôn tập chương V	69	117

LỜI NÓI ĐẦU

Các em học sinh yêu quý!

Sách BÀI TẬP TOÁN 9 (Kết nối tri thức với cuộc sống) gồm hai tập, là tài liệu bổ trợ cho sách giáo khoa TOÁN 9 bộ ***Kết nối tri thức với cuộc sống*** và được viết bởi cùng một đội ngũ tác giả.

Sách BÀI TẬP TOÁN 9 được viết theo đúng cấu trúc chương, bài như trong sách giáo khoa nhằm cung cấp cho các em một hệ thống bài tập phong phú, bổ trợ cho sách giáo khoa.

Mỗi bài học đều có phần tóm tắt các kiến thức cần nhớ, các kĩ năng giải toán cùng một vài ví dụ minh hoạ và phần đề bài tập. Cuối mỗi chương đều có phần câu hỏi (trắc nghiệm) và bài tập ôn tập chương. Cuối sách là phần lời giải, hướng dẫn, đáp số cho các bài tập.

BÀI TẬP TOÁN 9 vẫn bám sát các yêu cầu của chương trình, đồng thời làm đa dạng thêm các loại bài tập thích hợp với mỗi nội dung trong sách giáo khoa.

BÀI TẬP TOÁN 9 có những bài tập giúp các em củng cố, phát triển và nâng cao kiến thức đã học.

Một số bài tập trong BÀI TẬP TOÁN 9 còn cung cấp thêm cho các em những hiểu biết mới, phù hợp với kiến thức của các em, về một vài vấn đề mà các em có thể gặp trong nhiều tài liệu tham khảo toán học.

Với cấu trúc và định hướng như trên, BÀI TẬP TOÁN 9 sẽ là một tài liệu không thể thiếu cho tất cả các em học sinh sử dụng sách giáo khoa TOÁN 9 thuộc bộ sách ***Kết nối tri thức với cuộc sống.*** Chắc chắn BÀI TẬP TOÁN 9 cũng rất hữu ích cho mọi học sinh lớp 9, dù học theo bất cứ sách giáo khoa nào.

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam và tập thể các tác giả chân thành cảm ơn tất cả các giáo viên, học sinh, phụ huynh học sinh và mong nhận được những ý kiến góp ý để sách ngày càng hoàn thiện hơn.

Mọi góp ý xin gửi về Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 81 Trần Hưng Đạo, Hoàn Kiếm, Hà Nội.

CHƯƠNG 1 PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

BÀI 1 KHÁI NIỆM PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. *Phương trình bậc nhất hai ẩn* x và y là hệ thức dạng

$$ax + by = c, \qquad (1)$$

trong đó a, b và c là các số đã biết ($a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$).

Nếu tại $x = x_0$ và $y = y_0$ ta có $ax_0 + by_0 = c$ thì cặp số $(x_0; y_0)$ được gọi là một nghiệm của phương trình (1).

2. Mỗi phương trình bậc nhất hai ẩn đều có vô số nghiệm. Trong mặt phẳng toạ độ, tập hợp các điểm có toạ độ $(x; y)$ thoả mãn phương trình bậc nhất hai ẩn (1) là một đường thẳng. Đường thẳng đó gọi là *đường thẳng* $ax + by = c$ và kí hiệu là Δ.

3. Một cặp gồm hai phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$ và $a'x + b'y = c'$ được gọi là một *hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn*. Ta thường viết hệ phương trình đó dưới dạng:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c'. \end{cases} \qquad (*)$$

Mỗi cặp số $(x_0; y_0)$ được gọi là một nghiệm của hệ (*) nếu nó thoả mãn đồng thời cả hai phương trình của hệ (*).

4. Trên mặt phẳng toạ độ, gọi Δ là đường thẳng $ax + by = c$ và Δ' là đường thẳng $a'x + b'y = c'$. Khi đó, điểm chung (nếu có) của Δ và Δ' có toạ độ là nghiệm của hệ (*). Do đó:

– Nếu Δ cắt Δ' thì hệ (*) có nghiệm duy nhất;

– Nếu Δ song song với Δ' thì hệ (*) vô nghiệm (tức là không có nghiệm);

– Nếu Δ trùng với Δ' thì hệ (*) có vô số nghiệm.

Vậy mỗi hệ phương trình bậc nhất hai ẩn chỉ có 1 trong 3 khả năng sau về nghiệm: có một nghiệm duy nhất; vô nghiệm hoặc có vô số nghiệm.

B KĨ NĂNG GIẢI TOÁN

Trong thực hành các em cần thành thạo các kĩ năng sau:

– Nhận biết phương trình bậc nhất hai ẩn.

– Nhận biết nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn.

– Viết nghiệm và biểu diễn hình học tập hợp các nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn.

– Nhận biết hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn.

– Nhận biết nghiệm của hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn.

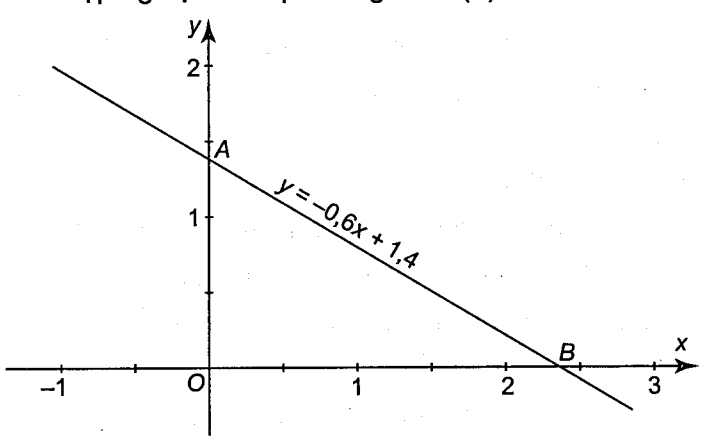
Ví dụ 1 Viết nghiệm và biểu diễn hình học tất cả các nghiệm của mỗi phương trình bậc nhất hai ẩn sau:

a) $3x+5y=7$ (1); b) $0x+2y=-3$ (2); c) $3x+0y=11$ (3).

Giải. a) Ta viết (1) dưới dạng $y=-0,6x+1,4$.

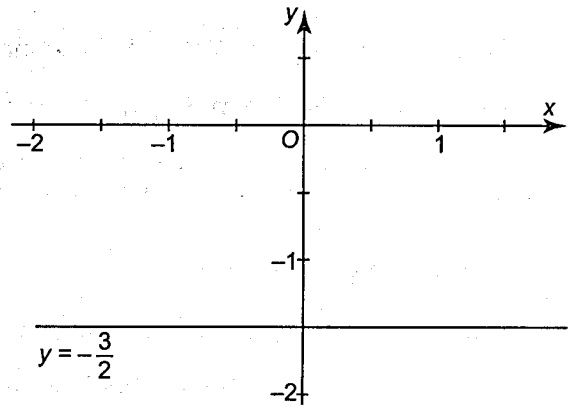
Khi đó, (1) có nghiệm tổng quát là: $(x;-0,6x+1,4)$ với $x\in\mathbb{R}$ tuỳ ý. Hơn nữa, mỗi nghiệm này là toạ độ của một điểm thuộc đường thẳng $d: 3x+5y=7$.

Ta có: $A(0;1,4)$ và $B\left(\frac{7}{3};0\right)$ là hai điểm nằm trên đường thẳng d nên ta có hình vẽ biểu diễn tập nghiệm của phương trình (1) như sau:



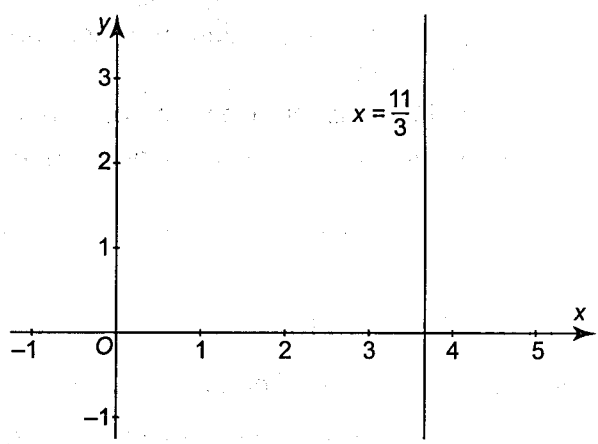
b) Ta viết (2) dưới dạng $y=-\frac{3}{2}$. Khi đó, phương trình (2) có nghiệm là $\left(x;-\frac{3}{2}\right)$ với $x\in\mathbb{R}$ tuỳ ý.

Ta có hình vẽ biểu diễn tập nghiệm của phương trình (2) như hình bên.



c) Ta viết (3) dưới dạng $x=\frac{11}{3}$. Khi đó, phương trình (3) có nghiệm là $\left(\frac{11}{3};y\right)$ với $y\in\mathbb{R}$ tuỳ ý.

Ta có hình vẽ biểu diễn tập nghiệm của phương trình (3) như hình bên.



Ví dụ 2 Trong các cặp số $(1;-1)$, $(0;2)$, $(-2;5)$, cặp số nào là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}3x+2y=4\\x-y=-7\end{cases}$?

Giải

– Khi $x=1$ và $y=-1$ thì $3x+2y=3\cdot1+2\cdot(-1)=1\neq4$ nên $(1;-1)$ không là nghiệm của phương trình thứ nhất. Do đó, $(1;-1)$ không là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

– Khi $x=0$ và $y=2$ thì:

• $3x+2y=3\cdot0+2\cdot2=4$ nên (0; 2) là nghiệm của phương trình thứ nhất;

• $x-y=0-2=-2\neq-7$ nên (0; 2) không là nghiệm của phương trình thứ hai.

Vậy (0; 2) không là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

– Ta thấy khi $x=-2$ và $y=5$ thì:

• $3x+2y=3\cdot(-2)+2\cdot5=4$ nên $(-2;5)$ là nghiệm của phương trình thứ nhất;

• $x - y = -2 - 5 = -7$ nên $(-2; 5)$ cũng là nghiệm của phương trình thứ hai.

Do đó $(-2; 5)$ là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Vậy trong các cặp số đã cho, cặp số $(-2; 5)$ là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Ví dụ 3 Một buổi chiếu phim có hai loại vé: vé người lớn giá 50 nghìn đồng và vé trẻ em giá 20 nghìn đồng. Biết rằng tổng số tiền bán vé thu được trong buổi đó là 2 triệu đồng.

a) Gọi x là số người lớn, y là số trẻ em xem phim trong buổi chiếu phim đó ($x, y \in \mathbb{N}$). Hãy lập phương trình bậc nhất hai ẩn đối với hai ẩn x và y.

b) Hãy chỉ ra một nghiệm $(x; y)$ với $x, y \in \mathbb{N}$ của phương trình lập ở câu a để tìm một phương án về số khán giả xem phim sao cho đạt doanh thu bán vé như trên.

Giải

Đổi: 2 triệu đồng = 2 000 (nghìn đồng).

a) Gọi x là số người lớn, y là số trẻ em đến buổi chiếu phim (x, y là số tự nhiên).

Theo đề bài, tổng số tiền bán vé thu được là 2 triệu đồng nên ta có phương trình bậc nhất hai ẩn x và y là: $50x + 20y = 2\,000$.

b) Giả sử nghiệm của phương trình là $(x_0; y_0)$. Khi đó $(x_0; y_0)$ thoả mãn

$$50x_0 + 20y_0 = 2\,000.$$

Với $x_0 = 20$, ta có: $1000 + 20y_0 = 2\,000$ và do đó $y_0 = 50$.

Vậy với một phương án là số khán giả gồm 20 người lớn và 50 trẻ em, buổi chiếu phim đó sẽ đạt được doanh thu bán vé là 2 triệu đồng (Lưu ý là còn nhiều phương án khác nữa về số khán giả đảm bảo doanh thu này, chẳng hạn có 30 người lớn và 25 trẻ em).

BÀI TẬP

1.1. Giả sử $(x; y)$ là nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn $4x - 2y = 6$.

a) Hoàn thành bảng sau đây:

x	–2	–1	0	1	2
y	?	?	?	?	?

Từ đó suy ra 5 nghiệm của phương trình đã cho.

b) Biểu diễn y theo x. Từ đó cho biết phương trình đã cho có bao nhiêu nghiệm?

1.2. Viết nghiệm và biểu diễn hình học tất cả các nghiệm của mỗi phương trình bậc nhất hai ẩn sau:

a) $3x-2y=5$; b) $0x+2y=4$; c) $2x+0y=-3$.

1.3. Cho phương trình bậc nhất hai ẩn $mx+y=-2$.

a) Xác định m để cặp số $(1;-2)$ là một nghiệm của phương trình đã cho.

b) Viết công thức nghiệm tổng quát của phương trình với m tìm được ở câu a.

1.4. Bác Hương bán hàng tạp hoá và có (đủ nhiều) các tờ tiền lẻ loại 2 nghìn đồng và 5 nghìn đồng. Bác cần trả lại cho một người mua hàng 25 nghìn đồng.

a) Gọi x là số tờ tiền loại 2 nghìn đồng, y là số tờ tiền loại 5 nghìn đồng mà bác Hương cần trả lại cho khách (x, $y\in\mathbb{N}$). Hãy lập phương trình bậc nhất hai ẩn đối với x và y.

b) Hãy chỉ ra một nghiệm $(x;y)$ với x, $y\in\mathbb{N}$ của phương trình lập ở câu a để tìm một phương án trả lại tiền thừa cho khách giúp bác Hương.

1.5. Một đội công nhân cần phải lắp đường ống dẫn nước trên một đoạn phố thẳng dài 65 m. Có hai loại ống dài 3 m và 5 m. Hãy chỉ ra ít nhất hai phương án lắp ống để không cần phải cưa ống ra (coi rằng các mối nối là không đáng kể).

1.6. Cho các cặp số: $(-2;2),(1;1),(4;1),(8;-2)$ và hai phương trình:

$$x+3y=4; \qquad (1)$$

$$2x-5y=-3. \qquad (2)$$

a) Những cặp số nào là nghiệm của phương trình (1)?

b) Cặp số nào là nghiệm của hệ gồm hai phương trình (1) và (2)?

c) Vẽ hai đường thẳng $d: x+3y=4$ và $d': 2x-5y=-3$ trên cùng một mặt phẳng toạ độ để minh hoạ kết quả của câu b.

1.7. Tìm a và b để hai phương trình $ax-2y=1$ và $x+by=3$ nhận cặp số $(1;-2)$ làm nghiệm chung.

1.8. Bằng cách vẽ các đường thẳng thích hợp trên cùng một mặt phẳng toạ độ, hãy tìm nghiệm của mỗi hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases}2x=-4\\3x-y=5;\end{cases}$ b) $\begin{cases}x-2y=4\\2y=-3.\end{cases}$

BÀI 2 GIẢI HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Cách giải hệ hai phương trình bằng phương pháp thế

Bước 1. Từ một phương trình của hệ, biểu diễn một ẩn theo ẩn kia rồi thế vào phương trình còn lại của hệ để được phương trình chỉ chứa một ẩn.

Bước 2. Giải phương trình một ẩn vừa nhận được, từ đó suy ra nghiệm của hệ đã cho.

2. Cách giải hệ hai phương trình bằng phương pháp cộng đại số

Bước 1. Đưa hệ phương trình đã cho về hệ phương trình có hệ số của cùng một ẩn nào đó trong hai phương trình bằng nhau hoặc đối nhau bằng cách nhân hai vế của mỗi phương trình với một số thích hợp (khác 0).

Bước 2. Cộng hay trừ từng vế của hai phương trình trong hệ để được phương trình chỉ chứa một ẩn.

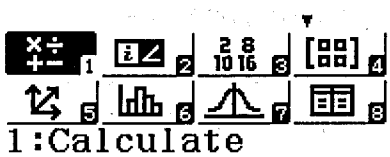
Bước 3. Giải phương trình một ẩn vừa nhận được, từ đó suy ra nghiệm của hệ phương trình đã cho.

3. Cách tìm nghiệm của hệ hai phương trình bằng máy tính cầm tay

Ta sử dụng loại máy tính cầm tay (MTCT) có chức năng này (có phím **MODE/MENU**). Dưới đây là hướng dẫn cụ thể với máy Fx-580VNX.

Ta viết hệ phương trình cần giải dưới dạng: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$. Chẳng hạn, để giải hệ $\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ -2x + y = 0 \end{cases}$, ta viết nó dưới dạng $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ -2x + y = 0 \end{cases}$. Khi đó, ta có $a_1 = 2$, $b_1 = 1$, $c_1 = 4$, $a_2 = -2$, $b_2 = 1$, $c_2 = 0$. Lần lượt thực hiện các bước sau:

Bước 1. Vào chức năng giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn bằng cách bấm phím **MENU** rồi bấm phím **9** để chọn tính năng **Equation/Func.**



Bấm phím **1** để chọn **Simul Equation.**

```
Simul Equation
Number of
     Unknowns?
Select 2~4
```

Cuối cùng, bấm phím **2** để giải hệ hai phương trình bậc nhất

```
{ [redacted]x + 0y = 0
{ 0x + 0y = 0

0
```

Bước 2. Ta nhập các hệ số a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 bằng cách bấm

[2] [=] [1] [=] [4] [=] [−] [2] [=] [1] [=] [0] [=]

```
{- 2x + 1y = 4
   2x + 1y = [redacted]

0
```

Bước 3. Sau khi nhập xong, ta bấm phím [=], màn hình hiện $x = 1$; tiếp tục bấm [=], màn hình hiện $y = 2$. Ta hiểu nghiệm của hệ phương trình là $(1; 2)$.

Chú ý

– Muốn xoá số vừa mới nhập thì bấm phím [AC]; muốn thay đổi số đã nhập ở một vị trí nào đó thì di chuyển con trỏ đến vị trí đó rồi nhập số mới.

– Bấm phím ▲ hay ▼ để chuyển hiển thị các giá trị của x và y trong kết quả.

– Nếu máy báo **Infinite Solution** thì hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm. Nếu máy báo **No Solution** thì hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

B KĨ NĂNG GIẢI TOÁN

Trong thực hành, các em cần thành thạo các kĩ năng sau:

– Giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp thế.

– Giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp cộng đại số.

– Tìm nghiệm của hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn bằng MTCT.

Ví dụ 1 Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế:

a) $\begin{cases} x-y=3 \\ 2x+3y=1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 4x+2y=8. \end{cases}$

Giải. a) Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có $x=y+3$. Thế vào phương trình thứ hai của hệ, ta được $2(y+3)+3y=1$ hay $5y=-5$, suy ra $y=-1$. Do đó $x=-1+3=2$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(2;-1)$.

b) Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có $y=5-2x$. Thế vào phương trình thứ hai, ta được $4x+2(5-2x)=8$ hay $0x+10=8$.

Do không có giá trị nào của x thoả mãn $0x+10=8$ nên hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 2 Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số:

a) $\begin{cases} -4x+3y=23 \\ 12x+5y=1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+y=4 \\ -6x-3y=-12. \end{cases}$

Giải. a) Nhân hai vế của phương trình thứ nhất với 3, ta được:

$$\begin{cases} -12x+9y=69 \\ 12x+5y=1. \end{cases}$$

Cộng từng vế hai phương trình của hệ mới, ta được $14y=70$ hay $y=5$.

Thế $y=5$ vào phương trình thứ nhất của hệ phương trình đã cho ta có $-4x+3\cdot 5=23$ hay $x=-2$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(-2;5)$.

b) Nhân hai vế của phương trình thứ nhất với 3, ta được hệ $\begin{cases} 6x+3y=12 \\ -6x-3y=-12. \end{cases}$

Cộng từng vế hai phương trình của hệ mới ta có $0x+0y=0$. Hệ thức này luôn thoả mãn với các giá trị tuỳ ý của x và y.

Với giá trị tuỳ ý của x, giá trị của y được tính bằng hệ thức $2x+y=4$ hay $y=4-2x$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;4-2x)$ với $x\in\mathbb{R}$ tuỳ ý.

Ví dụ 3 Một khu du lịch sinh thái bán vé vào cửa với giá 80 nghìn đồng mỗi vé, người cao tuổi được giảm giá 20 nghìn đồng mỗi vé. Vào một ngày cuối tuần, khu du lịch đã bán được 525 vé và thu về 35,8 triệu đồng.

Gọi x là số vé bán được ở mức giá 80 nghìn đồng và y là số vé bán được ở mức giá chiết khấu là 60 nghìn đồng.

a) Hãy viết một hệ hai phương trình liên quan đến các biến x và y.

b) Giải hệ hai phương trình nhận được ở câu a để cho biết mỗi loại vé đã bán được bao nhiêu?

Giải. a) Tổng số vé đã bán là 525 vé nên ta có phương trình thứ nhất là

$$x + y = 525.$$

Mặt khác, tổng số tiền thu về là 35 triệu 800 nghìn đồng nên ta có phương trình thứ hai là: $80x + 60y = 35\,800$ hay $4x + 3y = 1\,790$.

Vậy ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 525 \\ 4x + 3y = 1\,790. \end{cases}$

b) Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có $y = 525 - x$. Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta được $4x + 3(525 - x) = 1\,790$ hay $x = 215$. Thay $x = 215$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được $y = 525 - 215 = 310$.

Vậy khu du lịch đã bán được 215 vé giá 80 nghìn đồng và 310 vé giá 60 nghìn đồng.

BÀI TẬP

1.9. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế:

a) $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ \frac{1}{2}x - y = 18; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 0,2x + 0,5y = 0,7 \\ 4x + 10y = 9; \end{cases}$ c) $\begin{cases} -2x + 3y = 1 \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y = -\frac{1}{6}. \end{cases}$

1.10. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số:

a) $\begin{cases} 3x - 7y = -14 \\ 5x + 2y = 45; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 0,5y = -3 \\ 2x - y = 6; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ \frac{2}{3}x + y = 1. \end{cases}$

1.11. Sử dụng MTCT, tìm nghiệm của các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} \sqrt{3}x + 3y = 1 \\ 2x - \sqrt{3}y = \sqrt{3}; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2,5x - 3,5y = 0,5 \\ -0,5x + 0,7y = 1; \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 5 \\ 0,4x + y = 1. \end{cases}$

1.12. Tìm a và b để đường thẳng $y = ax + b$ đi qua hai điểm $(4; 1)$ và $(-4; -3)$.

1.13. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x + my = 5. \end{cases}$

a) Giải hệ với $m = 1$.

b) Chứng tỏ rằng hệ đã cho vô nghiệm khi $m = 6$.

1.14. Trong kinh tế học, đường IS là một phương trình bậc nhất biểu diễn tất cả các kết hợp thu nhập Y và lãi suất r để duy trì trạng thái cân bằng của thị trường hàng hoá trong nền kinh tế. Đường LM là một phương trình bậc nhất biểu diễn tất cả các kết hợp giữa thu nhập Y và lãi suất r duy trì trạng thái cân bằng của thị trường tiền tệ trong nền kinh tế. Trong một nền kinh tế, giả sử mức thu nhập cân bằng Y (tính bằng triệu đô la) và lãi suất cân bằng r thoả mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} 0{,}06Y - 5\,000r = 240 \\ 0{,}06Y + 6\,000r = 900. \end{cases}$$

Tìm mức thu nhập và lãi suất cân bằng.

1.15. Phương trình cung và phương trình cầu của một loại thiết bị kĩ thuật số cá nhân mới là:

Phương trình cầu: $p = 150 - 0{,}00001x$;

Phương trình cung: $p = 60 + 0{,}00002x$;

trong đó p là giá mỗi đơn vị sản phẩm (tính bằng đô la) và x là số lượng đơn vị sản phẩm. Tìm *điểm cân bằng* của thị trường này, tức là điểm $(p; x)$ thoả mãn cả hai phương trình cung và cầu.

1.16. Thầy Nam dạy Toán đang thiết kế một bài kiểm tra trắc nghiệm gồm hai loại câu hỏi, câu hỏi đúng/sai và câu hỏi nhiều lựa chọn. Bài kiểm tra sẽ được tính trên thang điểm 100, trong đó mỗi câu hỏi đúng/sai có giá trị 2 điểm và mỗi câu hỏi nhiều lựa chọn có giá trị 4 điểm. Thầy Nam muốn số câu hỏi nhiều lựa chọn gấp đôi số câu hỏi đúng/sai.

a) Gọi số câu hỏi đúng/sai là x, số câu hỏi nhiều lựa chọn là y (x, $y \in \mathbb{N}^*$). Viết hệ hai phương trình biểu thị số lượng của từng loại câu hỏi.

b) Giải hệ phương trình trong câu a để biết số lượng câu hỏi mỗi loại trong bài kiểm tra là bao nhiêu.

BÀI 3 GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Các bước giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình:

Bước 1. Lập hệ phương trình:

– Chọn ẩn số (thường chọn hai ẩn số) và đặt điều kiện thích hợp cho các ẩn số;

– Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết;

– Lập hệ phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2. Giải hệ phương trình.

Bước 3. Trả lời: Kiểm tra xem trong các nghiệm tìm được của hệ phương trình, nghiệm nào thoả mãn, nghiệm nào không thoả mãn điều kiện của ẩn và kết luận.

B KĨ NĂNG GIẢI TOÁN

Trong thực hành, các em cần thành thạo các kĩ năng sau: Giải được các bài toán không quá phức tạp bằng cách lập hệ phương trình bậc nhất hai ẩn, trong đó:

– Chọn được ẩn số và đặt được điều kiện thích hợp cho ẩn số.

– Lập được hệ phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng gồm đại lượng chưa biết theo các ẩn và các đại lượng đã biết.

– Giải được hệ phương trình đã lập và kết luận được nghiệm thoả mãn điều kiện của ẩn.

Ví dụ 1 Trong một thí nghiệm, Bình muốn pha để được 37 ml dung dịch HCl nồng độ 12%. Trong phòng thí nghiệm chỉ có sẵn dung dịch HCl nồng độ 8% và dung dịch HCl nồng độ 15%. Hỏi Bình cần sử dụng bao nhiêu mililít mỗi loại dung dịch để có được dung dịch mong muốn? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Giải

Gọi x và y lần lượt là số mililít dung dịch HCl nồng độ 8% và 15% cần sử dụng để tạo thành 37 ml dung dịch HCl nồng độ 12%. Điều kiện: $x > 0$, $y > 0$.

Vì Bình muốn pha 37 ml dung dịch HCl nồng độ 12% nên ta có phương trình: $x + y = 37$.

Mặt khác, Bình muốn pha dung dịch HCl có nồng độ 12% từ các dung dịch HCl 8% và 15% nên ta có phương trình:

$8\%x + 15\%y = 12\% \cdot 37$ hay $0,08x + 0,15y = 4,44$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 37 \\ 0,08x + 0,15y = 4,44. \end{cases}$ (1)

Nhân hai vế của phương trình đầu tiên của hệ với $0,08$ ta được

$$\begin{cases} 0,08x + 0,08y = 2,96 \\ 0,08x + 0,15y = 4,44. \end{cases} \quad (2)$$

Trừ từng vế hai phương trình của hệ (2) ta được $0,07y = 1,48$ hay $y = \frac{148}{7} \approx 21,1$. Thay $y = \frac{148}{7}$ vào phương trình thứ nhất của hệ ban đầu ta được $x = \frac{111}{7} \approx 15,9$.

Các giá trị tìm được này thoả mãn các điều kiện của ẩn.

Vậy bạn Bình cần sử dụng khoảng 15,9 ml dung dịch HCl nồng độ 8% và 21,1 ml dung dịch HCl nồng độ 15% để pha chế 37 ml dung dịch HCl nồng độ 12%.

Ví dụ 2 Một công ty sản xuất đĩa CD có giá sản xuất là 15 nghìn đồng cho một đĩa CD. Công ty có chi phí cố định hằng tháng là 120 triệu đồng (là chi phí mà công ty phải thanh toán định kì hằng tháng, dù không sản xuất gì). Nếu mỗi đĩa CD có thể bán với giá 30 nghìn đồng thì mỗi tháng phải bán được bao nhiêu đĩa CD để hoà vốn?

Để trả lời câu hỏi này, hãy lần lượt thực hiện các yêu cầu sau:

a) Xác định công thức tính tổng chi phí C khi công ty sản xuất x chiếc đĩa CD trong tháng.

b) Xác định công thức tính doanh thu R khi công ty bán được x chiếc đĩa CD.

Từ đó, sử dụng hai công thức đã lập để xác định *điểm hoà vốn* trong sản xuất, tức là mức sản xuất và bán được để tổng chi phí sản xuất bằng với doanh thu.

Giải. Đổi: 120 triệu đồng = 120 000 nghìn đồng.

a) Giá đơn vị của việc sản xuất x đĩa CD để bán là $15x$ nghìn đồng. Mặt khác, chi phí cố định mà công ty đó phải thanh toán là 120 000 nghìn đồng. Do đó, công thức tính tổng chi phí sản xuất x đĩa CD trong tháng của công ty là

$$C = 120\,000 + 15x \text{ (nghìn đồng).}$$

b) Công thức tính doanh thu khi bán được x đĩa CD, mỗi đĩa giá 30 nghìn đồng là $R = 30x$ (nghìn đồng).

Công ty sẽ hoà vốn nếu $C = R$, do đó ta có hệ phương trình xác định điểm hoà vốn là

$$\begin{cases} C = 120\,000 + 15x \\ C = 30x. \end{cases} \quad (1)$$

Thay $C = 30x$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được

$$30x = 120\,000 + 15x \text{ hay } x = 8\,000.$$

Ta thấy $x = 8\,000$ thoả mãn điều kiện của ẩn.

Khi đó, doanh thu $R = 30 \cdot 8\,000 = 240\,000$ nghìn đồng, tức là 240 triệu đồng.

Vậy công ty sẽ hoà vốn nếu bán được 8 000 đĩa CD và khi đó tổng doanh thu là 240 triệu đồng.

BÀI TẬP

1.17. Vào năm 2005, có tổng cộng 55 lần phóng vệ tinh thương mại và phi thương mại trên toàn thế giới. Ngoài ra, số lần phóng vệ tinh phi thương mại nhiều hơn 1 lần so với hai lần số lần phóng vệ tinh thương mại. Tính số lần phóng vệ tinh thương mại và phi thương mại trong năm 2005.

1.18. Một ca nô đi ngược dòng sông một quãng đường 6 km thì hết $\frac{3}{2}$ giờ. Mặt khác, ca nô đó chỉ mất 45 phút để đi xuôi dòng sông một quãng đường tương tự. Tính vận tốc thực của ca nô và vận tốc của dòng nước.

1.19. Để pha chế 1 000 lít cồn nồng độ 16%, người ta trộn lẫn dung dịch cồn nồng độ 10% và dung dịch cồn nồng độ 70%. Tính số lít mỗi dung dịch cồn nồng độ 10% và nồng độ 70% cần dùng.

1.20. Chị Hương tập thể dục vào mỗi buổi sáng trong vòng 40 phút. Chị ấy kết hợp giữa thể dục nhịp điệu giúp đốt cháy khoảng 11 calo mỗi phút và giãn cơ giúp đốt cháy khoảng 4 calo mỗi phút. Mục tiêu của chị là đốt cháy 335 calo trong mỗi buổi tập sáng của mình.

a) Viết hệ phương trình biểu thị thời gian chị dành cho mỗi hoạt động tập.

b) Từ hệ phương trình lập được ở câu a, tính thời gian chị nên dành cho mỗi hoạt động tập để đạt được mục tiêu của mình.

1.21. Chi phí để anh Hưng và ban nhạc của anh thu âm đĩa CD đầu tiên là 30 triệu đồng và mỗi đĩa CD sẽ có giá 8 nghìn đồng để sản xuất. Nếu ban nhạc bán đĩa CD của mình với giá 20 nghìn đồng mỗi đĩa thì phải bán bao nhiêu đĩa để hoà vốn (tức là doanh thu bằng với chi phí thu âm và sản xuất)?

1.22. Một cửa hàng sách có hai khu sách mới và sách cũ, mỗi khu được bán đồng giá. Mai chi 112 500 đồng để mua 3 cuốn sách mới và 4 cuốn sách cũ, còn Linh chi 157 500 đồng để mua 10 cuốn sách cũ và 3 cuốn sách mới. Tính giá mỗi cuốn sách mới và giá mỗi cuốn sách cũ.

1.23. Chuyến bay thẳng của hãng hàng không Delta Air Lines (một hãng hàng không của Mỹ) trên chặng Atlanta - Paris dài 4 000 dặm, mất khoảng 8 giờ để đi từ Atlanta đến Paris (đi về phía đông) và mất 10 giờ để đi từ Paris đến Atlanta (đi về phía tây). Mặc dù máy bay có vận tốc riêng (tức là vận tốc so với không khí) không đổi, nhưng có gió ngược khi di chuyển về phía tây và gió thuận khi di chuyển về phía đông nên vận tốc của máy bay so với mặt đất là khác nhau tuỳ vào hướng di chuyển của máy bay. Tính vận tốc riêng của máy bay và vận tốc gió.

1.24. Hùng dự định chạy 4 km trong tuần tập luyện đầu tiên và tăng quãng đường chạy thêm 1 km mỗi tuần. Trong khi đó, Huy lại dự định sẽ bắt đầu chạy 1 km trong tuần đầu tiên và sau đó tăng thêm 2 km mỗi tuần. Hỏi ở tuần thứ bao nhiêu thì hai người có tổng quãng đường chạy là bằng nhau và quãng đường đó là bao nhiêu kilômét?

ÔN TẬP CHƯƠNG I

A CÂU HỎI (Trắc nghiệm)

1. Hệ phương trình nào sau đây là hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn?

A. $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x-z=-1. \end{cases}$

B. $\begin{cases} 2x+y=3 \\ 0x+0y=1. \end{cases}$

C. $\begin{cases} 2x+y=3 \\ 0x-y=-1. \end{cases}$

D. $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x+y^2=1. \end{cases}$

2. Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 4x+3y=-1 \\ 2x-y=7 \end{cases}$ là

A. $(-1; 1)$.

B. $(3; -1)$.

C. $\left(\frac{1}{2}; -1\right)$.

D. $(2; -3)$.

3. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho các điểm $M(1;2)$, $N(2;3)$, $P(-1;-1)$, $Q(5;8)$. Đường thẳng $3x-2y=-1$ đi qua hai điểm nào trong các điểm đã cho?

A. M và N. B. M và P. C. P và Q. D. N và P.

4. Giá trị của a và b để đường thẳng $y=ax+b$ đi qua hai điểm $(1;-1)$ và $(-1;5)$ là

A. $a=1,\ b=-2$. B. $a=-5,\ b=1$. C. $a=-3,\ b=2$. D. $a=-1,\ b=0$.

5. Hệ phương trình nào sau đây có nghiệm duy nhất?

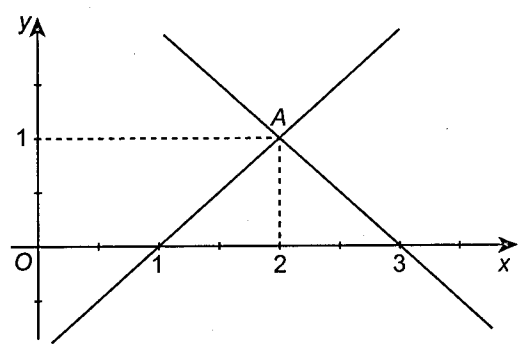
A. $\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x-4y=5. \end{cases}$ B. $\begin{cases} x-2y=3 \\ -2x+4y=-6. \end{cases}$

C. $\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x+4y=5. \end{cases}$ D. $\begin{cases} x-2y=3 \\ -x+2y=-2. \end{cases}$

6. Hình bên dưới minh hoạ tập nghiệm của hệ phương trình nào sau đây?

A. $\begin{cases} x-y=1 \\ x-y=3. \end{cases}$ B. $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=3. \end{cases}$

C. $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3. \end{cases}$ D. $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=3. \end{cases}$



7. Hệ phương trình $\begin{cases} 3x-ay=b \\ ax+by=3 \end{cases}$ có nghiệm là $(2;-3)$ khi

A. $a=3,\ b=3$. B. $a=3,\ b=-3$.

C. $a=-3,\ b=3$. D. $a=-3,\ b=-3$.

8. Hệ phương trình $\begin{cases} x+my=1 \\ -mx-y=-1 \end{cases}$ có vô số nghiệm trong trường hợp nào sau đây?

A. $m=1$. B. $m=-1$.

C. $m=2$. D. $m=-2$.

B BÀI TẬP

1.25. Hai nghiệm của phương trình $ax + by = 1$ là $(3; -1)$ và $(-4; -2)$. Tìm a và b.

1.26. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 0,4x + 0,3y = 1,1 \\ -0,5x + 0,2y = 1,5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y = 1 \\ -4x + 6y = 3; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 0,2x - 0,3y = 0,6 \\ -\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = -1. \end{cases}$

1.27. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + 9y = m + 3 \\ x + my = 2. \end{cases}$

Giải hệ phương trình đã cho trong mỗi trường hợp sau:

a) $m = 1$; b) $m = -3$; c) $m = 3$.

1.28. Tìm a để ba đường thẳng sau đồng quy:

$$d_1 : x - y = 1; \quad d_2 : x + y = 3; \quad d_3 : 2x + ay = 1.$$

1.29. Điểm mà tại đó chi phí sản xuất của công ty bằng doanh thu của nó được gọi là *điểm hoà vốn*. Dưới đây, C thể hiện chi phí sản xuất (tính bằng đô la) của x đơn vị sản phẩm và R thể hiện doanh thu (tính bằng đô la) từ việc bán x đơn vị sản phẩm. Tìm số lượng sản phẩm cần sản xuất và bán để hoà vốn, nghĩa là tìm giá trị của x để $C = R$ với

$$\begin{cases} C = 15x + 12\,000 \\ R = 18x - 6\,000. \end{cases}$$

Tính doanh thu của công ty khi đó.

1.30. Một buổi biểu diễn ca nhạc bán được 1 500 vé. Mỗi vé loại I có giá 250 nghìn đồng và mỗi vé loại II có giá 150 nghìn đồng. Tổng số tiền bán vé thu được là 285 triệu đồng. Hỏi mỗi loại vé đã bán được bao nhiêu vé?

1.31. Một khẩu phần súp cà chua chứa 100 calo và 18 gam carbohydrate. Một lát bánh mì nguyên hạt chứa 70 calo và 13 gam carbohydrate. Cần bao nhiêu khẩu phần mỗi loại để có được 230 calo và 42 gam carbohydrate?

1.32. Một loại xe ô tô có mức tiêu hao nhiên liệu là 8,1 lít/100 km khi lái xe trong thành phố và 4,8 lít/100 km khi lái xe trên đường cao tốc. Vào một ngày Chủ nhật, chiếc xe đi tổng quãng đường trong thành phố và trên đường cao tốc là 165 km và tiêu thụ hết 8,415 lít xăng. Tính độ dài quãng đường xe ô tô đi trong thành phố và trên đường cao tốc vào ngày Chủ nhật đó.

CHƯƠNG II

PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

BÀI 4 PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Để giải phương trình tích $(ax+b)(cx+d)=0$, ta giải hai phương trình $ax+b=0$ và $cx+d=0$. Sau đó lấy tất cả các nghiệm của chúng.
- Để giải phương trình chứa ẩn ở mẫu, ta làm theo các bước sau:

  Bước 1. Tìm điều kiện xác định của phương trình.

  Bước 2. Quy đồng mẫu hai vế của phương trình, rồi khử mẫu.

  Bước 3. Giải phương trình vừa tìm được.

  Bước 4 (Kết luận). Trong các giá trị tìm được của ẩn, giá trị nào thoả mãn điều kiện xác định chính là nghiệm của phương trình đã cho.

B KĨ NĂNG GIẢI TOÁN

- Giải thành thạo phương trình bậc nhất một ẩn.
- Đặt điều kiện cho phương trình chứa ẩn ở mẫu.
- Vận dụng hằng đẳng thức đáng nhớ, các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử, rút gọn phân thức để quy phương trình cần giải về dạng bậc nhất $ax + b = 0$ hoặc $(ax + b)(cx + d) = 0$.

Ví dụ 1 Giải phương trình $(2x-1)^2-9x^2=0$.

Giải. Ta có $(2x-1)^2-9x^2=0$

$$(2x-1)^2-(3x)^2=0$$

$$(2x-1-3x)(2x-1+3x)=0$$

$$(-x-1)(5x-1)=0$$

$-x-1=0$ hoặc $5x-1=0$.

- $-x-1=0$ hay $-x=1$, suy ra $x=-1$.
- $5x-1=0$ hay $5x=1$, suy ra $x=\frac{1}{5}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=-1$ và $x=\frac{1}{5}$.

Chú ý. Ta có thể viết: Tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-1;\frac{1}{5}\right\}$.

Ví dụ 2 Giải phương trình $4x^2+(2x-3)^2-9=0$.

Giải. Ta có

$4x^2+(2x-3)^2-9=0$

$4x^2-9+(2x-3)^2=0$

$(2x-3)(2x+3)+(2x-3)^2=0$

$(2x-3)\left[(2x+3)+(2x-3)\right]=0$

$(2x-3)\cdot 4x=0$

$2x-3=0$ hoặc $x=0$.

- $2x-3=0$ hay $2x=3$, suy ra $x=\frac{3}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=0$ và $x=\frac{3}{2}$.

Ví dụ 3 Giải phương trình $x^2-2x=x-2$.

Giải. Ta có

$x^2-2x=x-2$

$x(x-2)-(x-2)=0$

$(x-1)(x-2)=0$

$x-1=0$ hoặc $x-2=0$.

- $x-1=0$ hay $x=1$.
- $x-2=0$ hay $x=2$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=1$ và $x=2$.

Ví dụ 4 Giải phương trình $\frac{3x}{2x+3}-\frac{6x}{4x-1}=0.$ (1)

Giải. ĐKXĐ: $2x+3\neq 0$ và $4x-1\neq 0$ hay $x\neq -\frac{3}{2}$ và $x\neq \frac{1}{4}$.

Quy đồng mẫu ta được $\frac{3x(4x-1)-6x(2x+3)}{(2x+3)(4x-1)}=0,$

suy ra $3x(4x-1)-6x(2x+3)=0.$ (2)

Giải phương trình (2): $12x^2-3x-12x^2-18x=0$

$$-21x=0$$

$$x=0.$$

Giá trị $x=0$ thoả mãn ĐKXĐ. Vậy $x=0$ là nghiệm phương trình (1).

Ví dụ 5 Giải phương trình $\frac{1}{2x-1}+\frac{3}{2x+1}=\frac{6x-3}{4x^2-1}.$ (1)

Giải. ĐKXĐ: $x\neq \frac{1}{2}$ và $x\neq -\frac{1}{2}$.

Quy đồng mẫu hai vế của phương trình, ta được

$$\frac{(2x+1)+3(2x-1)}{(2x-1)(2x+1)}=\frac{6x-3}{4x^2-1},$$

suy ra $(2x+1)+3(2x-1)=6x-3.$ (2)

Giải phương trình (2): $8x-2=6x-3$

$$2x=-1$$

$$x=-\frac{1}{2}.$$

Giá trị $x=-\frac{1}{2}$ không thoả mãn ĐKXĐ. Vậy phương trình (1) vô nghiệm.

C BÀI TẬP

2.1. Giải các phương trình sau:

a) $(x+2)^2-(2x+1)(x+2)=0;$ b) $16x^2-(3x+2)^2=0.$

2.2. Giải các phương trình sau:

a) $x^3+3x^2-8=x^3+2x^2-7$;

b) $x(2x-5)=(2x+1)(5-2x)$.

2.3. Giải các phương trình sau:

a) $x^2+x=-6x-6$;

b) $2x^2-2x=x-1$.

2.4. Giải các phương trình sau:

a) $\dfrac{5x-1}{3x+2}-\dfrac{5x+2}{3x}=0$;

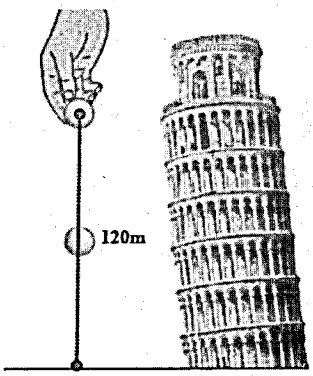
b) $\dfrac{6x-5}{2x-1}-\dfrac{9x}{3x-1}=0$.

2.5. Giải các phương trình sau:

a) $\dfrac{3}{x+2}+\dfrac{x}{x^2-2x+4}=\dfrac{4x^2}{x^3+8}$;

b) $\dfrac{3}{2x+1}+\dfrac{7}{3x+2}=\dfrac{21x+10}{(2x+1)(3x+2)}$.

2.6. Một vật rơi tự do từ độ cao so với mặt đất là 120 mét. Bỏ qua sức cản không khí, quãng đường chuyển động s (mét) của vật rơi tự do sau thời gian t được biểu diễn gần đúng bởi công thức $s=4,9t^2$, trong đó t là thời gian tính bằng giây. Sau bao nhiêu giây kể từ khi bắt đầu rơi thì vật này chạm mặt đất (làm tròn kết quả đến chữ số hàng đơn vị)?



BÀI 5 BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÍNH CHẤT

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

– Tính chất bắc cầu: Nếu $a<b$ và $b<c$ thì $a<c$.

– Liên hệ giữa bất đẳng thức và phép cộng: Với ba số a,b,c ta có:

Nếu $a<b$ thì $a+c<b+c$; Nếu $a>b$ thì $a+c>b+c$;

Nếu $a\le b$ thì $a+c\le b+c$. Nếu $a\ge b$ thì $a+c\ge b+c$.

– Liên hệ giữa bất đẳng thức và phép nhân:

Với ba số a,b và c với $c>0$, ta có: Với ba số a,b và c với $c<0$, ta có:

Nếu $a<b$ thì $ac<bc$; Nếu $a<b$ thì $ac>bc$;

Nếu $a\le b$ thì $ac\le bc$. Nếu $a\le b$ thì $ac\ge bc$.

Nếu $a>b$ thì $ac>bc$; Nếu $a>b$ thì $ac<bc$;

Nếu $a\ge b$ thì $ac\ge bc$. Nếu $a\ge b$ thì $ac\le bc$.

B KĨ NĂNG GIẢI TOÁN

– Vận dụng tính chất bắc cầu, sự liên hệ giữa bất đẳng thức và phép cộng, sự liên hệ giữa bất đẳng thức và phép nhân với số dương (với số âm) để chứng minh một bất đẳng thức.

– Mô hình hoá toán học các tình huống trong thực tiễn.

Ví dụ 1 So sánh $\frac{2024}{1011}$ và $\frac{199}{100}$.

Giải. Ta có $\frac{2024}{1011}>\frac{2022}{1011}=2$ và $\frac{199}{100}<\frac{200}{100}=2$, suy ra $\frac{2024}{1011}>\frac{199}{100}$.

Ví dụ 2 Cho $a<b$, chứng minh rằng

a) $2a+3b+1<5b+1$; b) $-5a+7b-10>2b-10$.

Giải

a) Từ $a<b$ nên $2a<2b$. Suy ra $2a+3b+1<2b+3b+1$ hay

$$2a+3b+1<5b+1.$$

b) Từ $a<b$ nên $-5a>-5b$. Suy ra $-5a+7b>-5b+7b$ hay $-5a+7b>2b$.

Suy ra $-5a+7b-10>2b-10$.

Ví dụ 3 Chứng minh rằng: Với mọi số a,b ta có $a^2+4ab\geq -4b^2$.

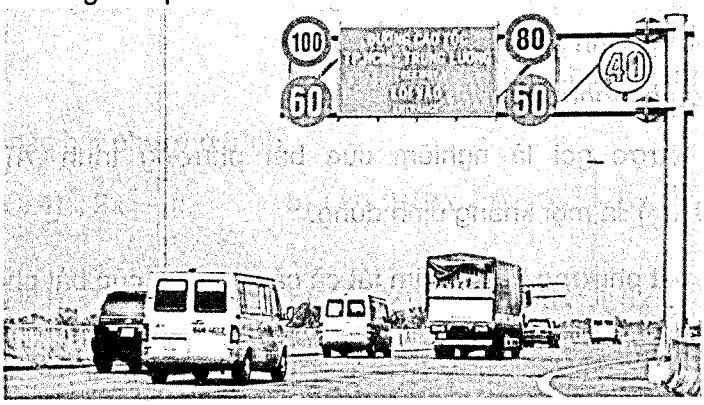
Giải. Ta có $a^2+4ab+4b^2=(a+2b)^2\geq 0$ nên $a^2+4ab\geq -4b^2$.

BÀI TẬP

2.7. Khi đi trên tuyến cao tốc Thành phố Hồ Chí Minh – Trung Lương, chúng ta thấy biển báo giao thông báo hiệu giới hạn tốc độ mà xe ô tô được phép đi trong điều kiện bình thường. Hãy viết các bất đẳng thức để mô tả tốc độ cho phép của ô tô

a) Ở làn ngoài cùng bên trái và ở làn giữa;

b) Ở làn ngoài cùng bên phải.



2.8. Viết bất đẳng thức để mô tả tình huống sau:

a) Bạn phải ít nhất 18 tuổi mới được đi bầu cử đại biểu Quốc hội.

b) Một thang máy chở được tối đa 700 kg.

c) Bạn phải mua hàng có tổng giá trị ít nhất 1 triệu đồng mới được giảm giá.

d) Bạn phải ném vào rổ ít nhất 5 quả bóng mới vào được đội tuyển bóng rổ.

2.9. So sánh

a) $-\dfrac{2019}{1010}$ và $-\dfrac{201}{100}$;

b) $\dfrac{2024^2-1}{2024}$ và $\dfrac{2025^2+1}{2025}$.

2.10. Cho $a>b$, hãy so sánh

a) $20a+5b$ và $20b+5a$;

b) $-3(a+b)-1$ và $-6b-1$.

2.11. Cho $a>b>0$, chứng minh rằng

a) $a^2>ab$ và $ab>b^2$;

b) $a^2>b^2$ và $a^3>b^3$.

Chú ý: Tính chất "Với $a>b>0$ thì $a^2>b^2$ và $a^3>b^3$" thường hay dùng trong nhiều bài toán chứng minh bất đẳng thức.

2.12. Chứng minh rằng với mọi số a,b ta có $\dfrac{a^2+b^2}{2}\geq ab$.

2.13. Chứng minh rằng: Trong ba số tự nhiên liên tiếp thì bình phương số đứng giữa lớn hơn tích hai số còn lại.

BÀI 6 BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

– *Khái niệm bất phương trình*: Bất phương trình dạng $ax+b<0$ (hoặc $ax+b\le 0$; $ax+b>0$; $ax+b\ge 0$) trong đó a,b là hai số đã cho, $a\neq 0$ được gọi là bất phương trình bậc nhất một ẩn x.

Nghiệm của bất phương trình

• Số x_0 được gọi là nghiệm của bất phương trình $A(x)<B(x)$ nếu $A(x_0)<B(x_0)$ là một khẳng định đúng.

• Giải một bất phương trình là tìm tất cả các nghiệm của bất phương trình đó.

– *Cách giải bất phương trình bậc nhất một ẩn* $ax+b<0(a\neq 0)$:

$$ax+b<0$$
$$ax<-b$$

• Nếu $a>0$ thì $x<-\dfrac{b}{a}$.

• Nếu $a<0$ thì $x>-\dfrac{b}{a}$.

– Các bất phương trình $ax+b\le 0$; $ax+b>0$; $ax+b\ge 0$ được giải tương tự.

B KĨ NĂNG GIẢI TOÁN

– Giải được bất phương trình bậc nhất.

– Vận dụng các quy tắc chuyển vế trong bất đẳng thức để đưa về dạng bất phương trình bậc nhất một ẩn.

– Vận dụng các quy tắc nhân, chia cho một số dương (số âm) để biến đổi bất phương trình về dạng bậc nhất một ẩn.

– Mô hình hoá toán học các tình huống trong thực tiễn.

Ví dụ 1 Giải các bất phương trình:

a) $5x+3>-3x+5$;

b) $-2x^2+2x+3\geq -2x^2+6x+5$.

Giải.

a) $5x+3>-3x+5$

$5x-(-3x)>5-3$

$8x>2$

$x>\frac{2}{8}$

$x>\frac{1}{4}$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x>\frac{1}{4}$.

b) $-2x^2+2x+3\geq -2x^2+6x+5$

$-2x^2+2x-(-2x^2+6x)\geq 5-3$

$-2x^2+2x+2x^2-6x\geq 2$

$-4x\geq 2$

$x\leq -\frac{2}{4}$

$x\leq -\frac{1}{2}$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x\leq -\frac{1}{2}$.

Ví dụ 2 Giải các bất phương trình:

a) $2(x-1)(x+1)<2x^2-x$;

b) $(x+2)(3x-1)>3x^2+6x$.

Giải.

a) $2(x-1)(x+1)<2x^2-x$

$2(x^2-1)<2x^2-x$

$2x^2-2<2x^2-x$

$-2<-x$

$x<2$.

Vậy bất phương trình có nghiệm $x<2$.

b) $(x+2)(3x-1)>3x^2+6x$

$3x^2+6x-x-2>3x^2+6x$

$5x-6x>2$

$-x>2$

$x<-2$.

Vậy bất phương trình có nghiệm $x<-2$.

Ví dụ 3 Một ngân hàng đang áp dụng lãi suất tiết kiệm kì hạn 12 tháng là 5,3% /năm. Chị Hoa dự kiến gửi một khoản tiền vào ngân hàng này và cần số tiền lãi hằng năm ít nhất là 78 triệu để chi tiêu. Hỏi số tiền chị Hoa cần gửi tiết kiệm ít nhất là bao nhiêu (làm tròn đến triệu đồng)?

Giải

Gọi x(triệu đồng) là số tiền chị Hoa cần gửi tiết kiệm. Số tiền lãi gửi tiết kiệm (triệu đồng) trong một năm là $0,053\cdot x$. Để có số tiền lãi ít nhất là 78 triệu đồng/năm thì ta phải có:

$0,053x\geq 78$

$x\geq 78:0,053$

$x\geq 1471,69$.

Vậy chị Hoa cần gửi ngân hàng ít nhất 1 472 triệu đồng.

C BÀI TẬP

2.14. Giải các bất phương trình:

a) $-7x+3>0$; b) $6x+5\geq 0$; c) $-\frac{1}{2}x+7<0$; d) $\frac{2}{5}x+3\leq 0$.

2.15. Giải các bất phương trình:

a) $-5x+3>2x+5$; b) $6x^2-5x+1\leq 6x^2+4x+3$.

2.16. Giải các bất phương trình:

a) $3(2x-3)(2x+3)>12x^2+2x$; b) $(2x+1)(5x-3)>10x^2+2x+1$.

2.17. Một công ty chuyển nhà cần di chuyển một cây đàn piano nặng 260 kg bằng thang máy. Thang máy có thể chở được tối đa là 710 kg.

a) Viết và giải bất phương trình để xác định khối lượng thang máy có thể chở thêm được.

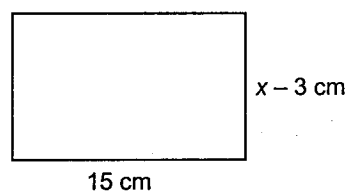
b) Ngoài chiếc đàn piano, thang máy có thể chở thêm được bao nhiêu người biết mỗi người nặng khoảng 60 kg.

2.18. David có thể kiếm được 8 USD cho mỗi giờ làm việc tại công ty chuyên chăm sóc cây cảnh và anh ấy muốn kiếm được ít nhất 1 200 USD trong mùa hè này.

a) Hãy viết một bất phương trình mô tả tình huống này.

b) Hỏi anh ấy cần làm việc ít nhất bao nhiêu giờ để kiếm được số tiền trên?

2.19. Chiều dài của một hình chữ nhật thì luôn lớn hơn hoặc bằng chiều rộng. Hãy viết và giải bất phương trình để tìm giá trị có thể của x (cm) trong hình vẽ dưới đây:



ÔN TẬP CHƯƠNG II

A CÂU HỎI (Trắc nghiệm)

Chọn một phương án đúng trong mỗi câu sau:

1. Nghiệm của bất phương trình $-5x-1<0$ là

A. $x>-\frac{1}{5}$. B. $x<-\frac{1}{5}$. C. $x\geq -\frac{1}{5}$. D. $x\leq -\frac{1}{5}$.

2. Điều kiện xác định của phương trình $\frac{2x}{x-1}+\frac{3x+1}{2x+1}=\frac{7x^2}{(x-1)(2x+1)}$ là

A. $x\neq 1$. B. $x\neq -\frac{1}{2}$. C. $x\neq 1$ và $x\neq -\frac{1}{2}$. D. $x\in\mathbb{R}$.

3. Phương trình $2x+1=m$ có nghiệm lớn hơn -2 với

A. $m>0$. B. $m>-2$. C. $m>-3$. D. $m\leq -3$.

4. Nghiệm của bất phương trình $3x-1\leq 2x+2$ là

A. $x>3$. B. $x<3$. C. $x\geq 3$. D. $x\leq 3$.

5. Cho $a>b$, khi đó ta có

A. $2a>b+1$. B. $-2a>-2b$. C. $2a>a+b$. D. $3a<a+2b$.

B BÀI TẬP

2.20. Giải các phương trình sau:

a) $5x(x+2)-10x-20=0$; b) $x^2-4x=x-4$.

2.21. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{6}{8+x^3}=\frac{1}{x^2-2x+4}+\frac{1}{x+2}$; b) $\frac{x}{x+5}+\frac{x-5}{x}=2$.

2.22. Giải các bất phương trình sau:

a) $(3x+1)(x+2)>x(3x-2)+1$; b) $2x(x+1)+3<x(2x+5)-7$.

2.23. a) Cho $a<b$ và $c<d$, chứng minh rằng $a+c<b+d$.

b) Cho $0<a<b$ và $0<c<d$, chứng minh rằng $0<ac<bd$.

2.24. Chứng minh rằng với số $a>0, b>0$ bất kì, ta luôn có $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$.

2.25. Hà phải làm 4 bài kiểm tra tiếng Anh: nghe, nói, đọc và viết. Bài nghe, nói, đọc Hà đạt điểm số lần lượt là 78, 83 và 89. Hỏi bài kiểm tra viết, Hà phải đạt điểm số là bao nhiêu để điểm số trung bình Hà đạt được của cả 4 bài kiểm tra ít nhất là 85?

2.26. Mức lương tối thiểu theo quy định ở Pháp năm 2022 là 10,25 € cho mỗi giờ làm việc.

Trong dịp hè, Laurent David làm thêm tại một khách sạn theo mức lương tối thiểu như quy định và anh ấy muốn kiếm được ít nhất 1500 € trong mùa hè này.

a) Hãy viết một bất phương trình mô tả tình huống này.

b) Hỏi anh ấy cần làm việc ít nhất bao nhiêu giờ để kiếm được số tiền trên?

(€ là viết tắt của từ Euro, là loại tiền tệ mà 20 nước thuộc liên minh Châu Âu đang sử dụng chung)

2.27. Hai ô tô khởi hành cùng một lúc từ A đến B trên cùng quãng đường dài 150 km. Vận tốc xe thứ nhất hơn vận tốc xe thứ hai là 10 km/h và xe thứ nhất đến B sớm hơn xe thứ hai là 30 phút. Hỏi vận tốc của hai xe là bao nhiêu?

CHƯƠNG III

CĂN BẬC HAI VÀ CĂN BẬC BA

BÀI 7 CĂN BẬC HAI VÀ CĂN THỨC BẬC HAI

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Căn bậc hai của số thực không âm a là số thực x sao cho $x^2 = a$.

2. Số âm không có căn bậc hai, số 0 có một căn bậc hai duy nhất là 0, số dương a có đúng hai căn bậc hai đối nhau là $\sqrt{a}$ (căn bậc hai số học của a) và $-\sqrt{a}$.

3. Căn thức bậc hai là biểu thức có dạng $\sqrt{A}$, trong đó A là một biểu thức đại số. A được gọi là biểu thức lấy căn hoặc biểu thức dưới dấu căn.

4. Điều kiện xác định (hay điều kiện có nghĩa) của $\sqrt{A}$ là $A \geq 0$.

5. Một số tính chất cơ bản của căn bậc hai:

- $\sqrt{A} \geq 0, \left(\sqrt{A}\right)^2 = A$ với $A \geq 0$.
- $\sqrt{A^2} = |A|$ với mọi biểu thức A.
- $\sqrt{A} \leq \sqrt{B}$ nếu $0 \leq A \leq B$.

B KĨ NĂNG GIẢI TOÁN

Trong thực hành, các em cần thành thạo các kĩ năng sau:

– Nhận biết được căn bậc hai, căn thức bậc hai.

– Nhận biết điều kiện xác định của căn thức bậc hai.

– Nhận biết ý nghĩa của giá trị căn thức bậc hai, vận dụng giải quyết các bài toán thực tế.

– Sử dụng được MTCT tính căn bậc hai của một số thực không âm tuỳ ý đã cho với yêu cầu cụ thể về độ chính xác của kết quả.

– Sử dụng các tính chất cơ bản của căn thức bậc hai trong việc đơn giản bậc hai của một bình phương.

– So sánh được hai căn bậc hai đơn giản bằng cách so sánh hai số lấy căn.

Ví dụ 1 Sử dụng MTCT tìm căn bậc hai số học của mỗi số sau rồi suy ra căn bậc hai của chúng:

a) 961. b) 149,0841.

Giải. a) Sử dụng MTCT thích hợp bấm liên tiếp các phím $\boxed{\sqrt{\blacksquare}}\ \boxed{9}\ \boxed{6}\ \boxed{1}\ \boxed{=}$, màn hình hiện kết quả 31. Do đó $\sqrt{961}=31$. Từ đó căn bậc hai của 961 là 31 và -31.

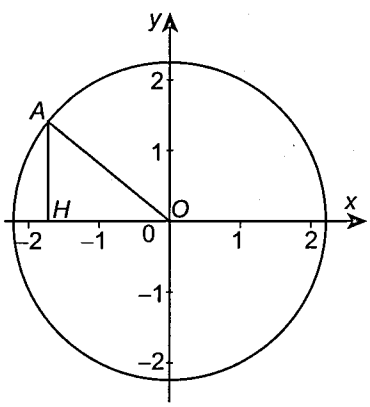
b) Bấm liên tiếp $\boxed{\sqrt{\blacksquare}}\ \boxed{1}\ \boxed{4}\ \boxed{9}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{0}\ \boxed{8}\ \boxed{4}\ \boxed{1}\ \boxed{=}\ \boxed{S\leftrightarrow D}$, màn hình hiện kết quả 12.21. Do đó $\sqrt{149,0841}=12,21$. Từ đó căn bậc hai của 149,0841 là 12,21 và $-12,21$.

Ví dụ 2 Trên mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm $A\left(-\sqrt{3};\sqrt{2}\right)$. Đường tròn (C) tâm O đi qua điểm A cắt trục hoành tại hai điểm. Chứng tỏ rằng hoành độ hai giao điểm đó là các căn bậc hai của 5.

Giải. Kẻ AH vuông góc với trục hoành (H thuộc trục hoành). Từ giả thiết về toạ độ của điểm A suy ra $AH=\sqrt{2}, OH=\sqrt{3}$. Từ đó áp dụng định lí Pythagore cho tam giác vuông HAO ta có

$$OA^2=OH^2+AH^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2=3+2=5.$$

Suy ra $OA=\sqrt{5}$, đường tròn (C) có bán kính bằng $\sqrt{5}$ cắt trục hoành tại hai điểm cách gốc O một khoảng bằng $\sqrt{5}$. Do đó, hoành độ hai giao điểm này là $\sqrt{5}$ và $-\sqrt{5}$. Vì vậy, hoành độ hai giao điểm của đường tròn (C) với trục hoành là các căn bậc hai của 5.



BÀI TẬP

3.1. Tìm các căn bậc hai của mỗi số sau:

a) 81; b) $\frac{16}{625}$; c) 0,0121; d) 6 400.

3.2. Sử dụng MTCT tính:

a) $\sqrt{17}$ (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ ba);

b) Các căn bậc hai của 4 021 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm);

c) Giá trị biểu thức $\dfrac{-11+\sqrt{11^2-4\cdot 3\cdot 2}}{2\cdot 3}$ (làm tròn kết quả với độ chính xác 0,005).

3.3. Rút gọn:

a) $\left(\sqrt{4,1}\right)^2-\left(-\sqrt{6,1}\right)^2$;

b) $\left(\sqrt{101}\right)^2-\sqrt{(-99)^2}$;

c) $\sqrt{\left(\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right)^2}-\left(-\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right)$;

d) $\sqrt{\left(\sqrt{10}+3\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{10}-3\right)^2}$.

3.4. Sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ hiệu hai bình phương và bình phương của một hiệu, rút gọn:

a) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$;

b) $\sqrt{2-2\sqrt{2}+1}$.

3.5. Khi giải phương trình $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c là ba số thực đã cho, $a\neq 0$), ta phải tính giá trị của căn thức bậc hai $\sqrt{b^2-4ac}$. Hãy tính giá trị của căn thức này với các phương trình sau:

a) $x^2+5x+6=0$;

b) $4x^2-5x-6=0$;

c) $-3x^2-2x+33=0$.

3.6. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{49x^4}-3x^2$;

b) $\sqrt{a^6(a-b)^2}:(a-b)$ với $a<b<0$.

3.7. Rút gọn rồi tính giá trị biểu thức $\sqrt{25\left(4x^2-4x+1\right)^2}$ tại $x=\sqrt{3}$.

BÀI 8 KHAI CĂN BẬC HAI VỚI PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Liên hệ giữa phép khai căn bậc hai và phép nhân

Với A, B là hai biểu thức không âm ta có $\sqrt{AB} = \sqrt{A}\sqrt{B}$.

Kết quả trên có thể mở rộng cho nhiều biểu thức không âm, chẳng hạn:

$$\sqrt{ABC} = \sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{C} \quad (A \geq 0, B \geq 0, C \geq 0).$$

2. Liên hệ giữa phép khai căn bậc hai và phép chia

Với A, B là hai biểu thức, $(A \geq 0, B > 0)$ ta có $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$.

B KĨ NĂNG GIẢI TOÁN

Trong thực hành, các em cần thành thạo các kĩ năng: Tính căn bậc hai của một tích, một thương bằng cách sử dụng các công thức

$$\sqrt{AB} = \sqrt{A}\sqrt{B} \ (A \geq 0, B \geq 0); \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \ (A \geq 0, B > 0).$$

Ví dụ 1 Tính:

a) $\sqrt{361 \cdot 256}$; b) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{112}$; c) $\sqrt{2{,}1} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{21}$.

Giải

a) $\sqrt{361 \cdot 256} = \sqrt{361} \cdot \sqrt{256} = 19 \cdot 16 = 304$.

b) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{112} = \sqrt{7 \cdot 112} = \sqrt{7 \cdot 7 \cdot 16} = \sqrt{7^2} \cdot \sqrt{16} = 7 \cdot 4 = 28$.

c) $\sqrt{2{,}1} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{21} = \sqrt{2{,}1 \cdot 10 \cdot 21} = \sqrt{21 \cdot 21} = \sqrt{21^2} = 21$.

Ví dụ 2 Thực hiện các phép tính sau:

a) $\dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{60}}$; b) $\left(\sqrt{12} + \sqrt{108} - \sqrt{675}\right) : \sqrt{3}$.

Giải

a) $\dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{60}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{4\cdot 3\cdot 5}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}.$

b) $\left(\sqrt{12}+\sqrt{108}-\sqrt{675}\right):\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3\cdot 4}}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{27\cdot 4}}{\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{25\cdot 27}}{\sqrt{3}}$

$=\dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{27}\cdot\sqrt{4}}{\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{25}\cdot\sqrt{27}}{\sqrt{3}}=2+\sqrt{9}\cdot 2-5\cdot\sqrt{9}=-7.$

BÀI TẬP

3.8. So sánh:

a) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{11}$ và $\sqrt{56}$; b) $\dfrac{\sqrt{141}}{\sqrt{3}}$ và 7.

3.9. Không dùng MTCT, tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sqrt{1\dfrac{2}{3}}:\sqrt{\dfrac{1}{15}}$; b) $\sqrt{4,9}\cdot\sqrt{1\,000}$.

3.10. Không dùng MTCT, chứng minh rằng các biểu thức sau có giá trị là số nguyên:

a) $\sqrt{8+\sqrt{15}}\cdot\sqrt{8-\sqrt{15}}$; b) $\left(\sqrt{6-\sqrt{11}}+\sqrt{6+\sqrt{11}}\right)^2$.

3.11. Không dùng MTCT, hãy tính giá trị của biểu thức sau:

$$P=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{8}}.$$

3.12. Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{3\sqrt{10}+\sqrt{20}-3\sqrt{6}-\sqrt{12}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

3.13. So sánh $\sqrt{\sqrt{6+\sqrt{20}}}$ và $\sqrt{\sqrt{6}+1}$.

3.14. Cho a, b là hai số dương khác nhau thoả mãn điều kiện

$$a-b=\sqrt{1-b^2}-\sqrt{1-a^2}.$$

Chứng minh rằng $a^2+b^2=1$.

BÀI 9 BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN VÀ RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

Nếu a, b là hai số, trong đó $b \geq 0$ thì $\sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b}$.

2. Đưa thừa số vào trong dấu căn

Nếu $a \geq 0$ và $b \geq 0$ thì $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$.

Nếu $a < 0$ và $b \geq 0$ thì $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b}$.

3. Trục căn thức ở mẫu

Trục căn thức ở mẫu là biến đổi biểu thức thành một biểu thức mới không chứa căn ở mẫu.

- $\dfrac{A}{\sqrt{B}} = \dfrac{A\sqrt{B}}{B}$ $(B > 0)$;
- $\dfrac{C}{\sqrt{A}+B} = \dfrac{C\left(\sqrt{A}-B\right)}{A-B^2}$; $\dfrac{C}{\sqrt{A}-B} = \dfrac{C\left(\sqrt{A}+B\right)}{A-B^2}$ $(A \geq 0,\ A \neq B^2)$;
- $\dfrac{C}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} = \dfrac{C\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)}{A-B}$; $\dfrac{C}{\sqrt{A}-\sqrt{B}} = \dfrac{C\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}\right)}{A-B}$ $(A \geq 0, B \geq 0, A \neq B)$.

4. Rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai

Có thể rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai bằng cách phối hợp các phép tính cộng, trừ, nhân, chia các căn bậc hai và các phép biến đổi căn đơn giản (đưa thừa số vào trong hoặc ra ngoài dấu căn, trục căn thức ở mẫu).

B KĨ NĂNG GIẢI TOÁN

Trong thực hành, các em cần thành thạo các kĩ năng sau:

– Thực hiện được yêu cầu đưa một thừa số vào trong (hoặc ra ngoài dấu căn bậc hai).

– Thực hiện được yêu cầu trục căn thức ở mẫu trong một số trường hợp đơn giản.

– Linh hoạt vận dụng quy tắc nhân, chia hai căn thức bậc hai và các biến đổi căn bậc hai đơn giản để rút gọn một số biểu thức chứa căn không quá phức tạp.

Ví dụ 1 Đưa thừa số ra ngoài hoặc vào trong dấu căn bậc hai để rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{75}-\sqrt{27}$; b) $-3\sqrt{\frac{7}{3}}+\sqrt{21}$.

Giải. a) $\sqrt{75}-\sqrt{27}=\sqrt{5^2\cdot 3}-\sqrt{3^2\cdot 3}=5\sqrt{3}-3\sqrt{3}=2\sqrt{3}$.

b) $-3\sqrt{\frac{7}{3}}+\sqrt{21}=-\sqrt{3^2\cdot\frac{7}{3}}+\sqrt{21}=-\sqrt{21}+\sqrt{21}=0$.

Ví dụ 2 Không sử dụng MTCT, hãy sắp xếp các số sau theo thứ tự từ bé đến lớn: $4\sqrt{3}$; $3\sqrt{5}$; $5\sqrt{2}$.

Giải. Đưa thừa số vào trong dấu căn bậc hai, ta có:

$$4\sqrt{3}=\sqrt{4^2\cdot 3}=\sqrt{48};$$
$$3\sqrt{5}=\sqrt{3^2\cdot 5}=\sqrt{45};$$
$$5\sqrt{2}=\sqrt{5^2\cdot 2}=\sqrt{50}.$$

Vì $\sqrt{45}<\sqrt{48}<\sqrt{50}$ nên $3\sqrt{5}<4\sqrt{3}<5\sqrt{2}$.

BÀI TẬP

3.15. Tính giá trị biểu thức $P=\left(\sqrt{20}+2\sqrt{45}-3\sqrt{80}\right)^2$.

3.16. Sắp xếp các số sau theo thứ tự tăng dần: $9\sqrt{2}$; $8\sqrt{3}$; $5\sqrt{6}$; $4\sqrt{7}$.

3.17. Thực hiện phép tính $\left(\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{7}}+\sqrt{175}-2\sqrt{2}\right)^2$.

3.18. Thực hiện phép tính $\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}}-\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}}$.

3.19. Không sử dụng MTCT, chứng minh rằng biểu thức sau có giá trị là một số nguyên:

$$P=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{1+\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}-1}{1+\sqrt{3}-\sqrt{5}}\right)\left(\sqrt{3}-\frac{4}{\sqrt{3}}+2\right)\sqrt{0,2}\,.$$

3.20. a) Trục căn ở mẫu của biểu thức $\frac{3+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}$.

b) Tính giá trị biểu thức $P=x\left(x^4-6x^2+1\right)$ tại $x=\frac{3+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}$.

BÀI 10 CĂN BẬC BA VÀ CĂN THỨC BẬC BA

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa căn bậc ba của một số thực

- Căn bậc ba của số thực a là số thực x thoả mãn $x^3 = a$.
- Mỗi số thực a đều có một căn bậc ba duy nhất, kí hiệu là $\sqrt[3]{a}$, trong đó 3 gọi là chỉ số của căn. Từ định nghĩa có ngay $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = \sqrt[3]{a^3} = a$.

2. Khai căn bậc ba của một số bằng MTCT

- Phép tìm căn bậc ba của một số thực gọi là phép khai căn bậc ba.
- Để tính $\sqrt[3]{312}$, với MTCT thích hợp ta bấm các phím [SHIFT] [$\sqrt{\blacksquare}$] [3] [1] [2] [=], màn hình hiện kết quả 6,782422886. Ta kết luận $\sqrt[3]{312} \approx 6{,}782422886$.

3. Định nghĩa căn thức bậc ba

- Với A là một biểu thức đại số, người ta gọi $\sqrt[3]{A}$ là căn thức bậc ba của A, trong đó A được gọi là biểu thức lấy căn hay biểu thức dưới dấu căn.
- Với mọi biểu thức đại số A luôn có $\left(\sqrt[3]{A}\right)^3 = \sqrt[3]{A^3} = A$.

B KĨ NĂNG GIẢI TOÁN

Trong thực hành, các em cần có được các kĩ năng sau:

– Nhận biết căn bậc ba của một số, nhận biết căn thức bậc ba, giải quyết một số tình huống thực tế đơn giản.

– Sử dụng được định nghĩa căn bậc ba, giải thích vì sao một số là căn bậc ba của một số đã cho.

– Biết sử dụng MTCT, tính căn bậc ba của một số đã cho.

Ví dụ 1 Không dùng MTCT, tính:

a) $\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{0{,}001} + \sqrt[3]{\dfrac{1}{8}}$;

b) $\left(2\sqrt[3]{216} - 5\sqrt[3]{-64}\right)\sqrt[3]{\dfrac{1}{-125}}$.

Giải

a) $\sqrt[3]{27}-\sqrt[3]{0,001}+\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\sqrt[3]{3^3}-\sqrt[3]{0,1^3}+\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^3}=3-0,1+\frac{1}{2}=\frac{17}{5}.$

b) $\left(2\sqrt[3]{216}-5\sqrt[3]{-64}\right)\sqrt[3]{\frac{1}{-125}}=\left(2\sqrt[3]{6^3}-5\sqrt[3]{(-4)^3}\right)\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{5}\right)^3}=\left[2\cdot 6-5\cdot(-4)\right]\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)=-\frac{32}{5}.$

Ví dụ 2 Tìm x, biết rằng:

a) $\sqrt[3]{-x+1}=2$; b) $5x+\sqrt[3]{-27x^3}=2.$

Giải

a) Viết $2=\sqrt[3]{2^3}$ ta được $\sqrt[3]{-x+1}=\sqrt[3]{2^3}$, từ đó $-x+1=8$ hay $x=-7.$

b) Vì $\sqrt[3]{-27x^3}=\sqrt[3]{(-3x)^3}=-3x$ nên ta có $5x-3x=2$ hay $x=1.$

BÀI TẬP

3.21. Sử dụng định nghĩa căn bậc ba của một số thực, tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sqrt[3]{-27}+2\sqrt[3]{\frac{1}{8}}+5\sqrt[3]{-0,008}$; b) $\sqrt[3]{0,001}-3\sqrt[3]{\frac{8}{125}}+2\sqrt[3]{-64}.$

3.22. Không dùng MTCT, tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\left(\sqrt[3]{64}-\sqrt[3]{27}\right)\cdot\sqrt[3]{\frac{125}{8}}$; b) $\frac{5\sqrt[3]{-8}-10\sqrt[3]{0,008}+3\sqrt[3]{343}}{\sqrt[3]{0,064}+\sqrt[3]{0,125}}.$

3.23. Tìm x, biết rằng:

a) $\sqrt[3]{2x-1}=1$; b) $5x-\sqrt[3]{64x^3}=25.$

3.24. Tương tự căn bậc hai, căn bậc ba có tính chất sau: Nếu $a<b$ thì $\sqrt[3]{a}<\sqrt[3]{b}$. Sử dụng tính chất này, so sánh:

a) 5 và $\sqrt[3]{123}$; b) $\sqrt[3]{0,009}$ và 0,2.

3.25. Tính diện tích tôn cần dùng để làm một cái thùng không nắp hình lập phương chứa được 215 lít nước (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

3.26. Sử dụng MTCT, tính giá trị biểu thức (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ ba):

a) $P = 2\sqrt[3]{x^2 - 1}$ tại $x = 5$; b) $P = \sqrt[3]{2x - 1} - \sqrt[3]{x + 1}$ tại $x = 0,5$.

3.27. Khoảng cách trung bình d (tính bằng mét) giữa một hành tinh và Mặt Trời được tính theo công thức $d = \sqrt[3]{\dfrac{10^{19}T^2}{2,97}}$, trong đó T (tính bằng giây) là thời gian hành tinh quay một vòng quanh Mặt Trời. Biết rằng Trái Đất quay một vòng quanh Mặt Trời trong khoảng 365 ngày. Hãy tính khoảng cách trung bình giữa Trái Đất và Mặt Trời là bao nhiêu triệu kilômét (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

(Theo *courses.lumenleaning.com/sunny-osuniversityphysics/chapter/13-4-satelitte-orbits-and-energy/*)

ÔN TẬP CHƯƠNG III

A CÂU HỎI (Trắc nghiệm)

1. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. Mọi số thực đều có căn bậc hai.

B. Các số thực âm không có căn bậc ba.

C. Mọi số thực đều có căn bậc hai số học.

D. Các số thực dương có hai căn bậc hai đối nhau.

2. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. Mọi số thực dương đều có căn bậc hai.

B. Số –216 không có căn bậc ba.

C. Số –216 không có căn bậc hai.

D. Số –216 không có căn bậc hai số học.

3. Cho biết $3,1^2 = 9,61$. Số nào sau đây là giá trị của $\sqrt{0,000961}$?

A. 3,1. B. 0,31. C. 0,031. D. 0,000031.

4. Biểu thức nào sau đây có giá trị khác với các biểu thức còn lại?

A. $\sqrt{7^2}$. B. $\sqrt{(-7)^2}$. C. $\left(-\sqrt{7}\right)^2$. D. $-\left(\sqrt{7}\right)^2$.

5. Độ dài cạnh khối lập phương có thể tích bằng 0,512 dm^3 là

A. 8 cm. B. 8 dm. C. 0,8 cm. D. 0,08 dm.

B BÀI TẬP

3.28. Thực hiện phép tính:

a) $\sqrt{12-\sqrt{23}}\cdot\sqrt{12+\sqrt{23}}$;

b) $\left(\sqrt{9-\sqrt{17}}+\sqrt{9+\sqrt{17}}\right)^2$.

3.29. So sánh $\sqrt{\sqrt{89+24\sqrt{5}}}$ và $\sqrt{1+\sqrt{122}}$.

3.30. a) Chứng minh rằng $\sqrt{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{5}}=2$ và $\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{10}$.

b) Rút gọn các biểu thức sau:

$$A=\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^3+\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^3;$$

$$B=\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^5+\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^5.$$

3.31. Cho x, y là hai số dương thoả mãn $x^2+y^2=1$. Tính giá trị biểu thức

$$A=x-y+\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-y^2}.$$

3.32. a) Khai triển $\left(2-\sqrt{3}\right)^2$ và $\left(2\sqrt{3}-3\right)^2$ thành những biểu thức không còn bình phương.

b) Sử dụng kết quả câu a, rút gọn các biểu thức sau:

$$A=\sqrt{4-2\sqrt{3}-\sqrt{21-12\sqrt{3}}};$$

$$B=\sqrt{2+\sqrt{3}+\sqrt{4-2\sqrt{3}-\sqrt{21-12\sqrt{3}}}}.$$

CHƯƠNG IV
HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

BÀI 11 TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

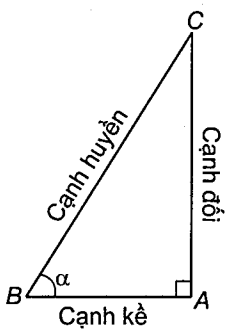
1. Cho tam giác ABC trên Hình 4.1.Ta có

$$\sin\alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\cot\alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh đối}} = \frac{AB}{AC}$$



Hình 4.1

Chú ý: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ là những số dương bé hơn 1.

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

2. Bảng giá trị lượng giác của các góc 30°, 45°, 60°.

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

3. Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng côsin góc kia, tang góc này bằng côtang của góc kia, tức là hai góc nhọn α, β phụ nhau thì ta có:

$\sin\alpha = \cos\beta$; $\cos\alpha = \sin\beta$;

$\tan\alpha = \cot\beta$; $\cot\alpha = \tan\beta$.

B KĨ NĂNG GIẢI TOÁN

– Vận dụng được định nghĩa các tỉ số lượng giác của góc nhọn để giải toán.

– Sử dụng được bảng giá trị lượng giác của các góc đặc biệt để giải toán.

– Vận dụng được quan hệ giữa tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau để giải toán.

– Biết dùng MTCT để tính giá trị (gần đúng) của $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ và ngược lại tìm được số đo (gần đúng) của góc nhọn α khi biết một giá trị lượng giác của α.

Ví dụ 1 Xét tam giác ABC vuông tại A, hai cạnh góc vuông $AB = 5$ cm, $AC = 12$ cm.

a) Tính $\sin B$, $\cos B$.

b) Gọi AH là đường cao của tam giác ABC. Tại sao $\sin B = \dfrac{AH}{5}$? Từ đó hãy suy ra $AH = \dfrac{60}{13}$.

Giải (H.4.2)

a) Theo định lí Pythagore, ta có

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 5^2 + 12^2 = 169 = 13^2$ nên $BC = 13$.

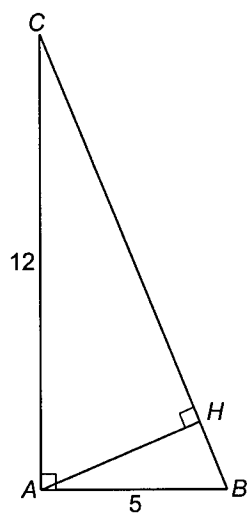
Trong tam giác vuông ABC, ta có

$\sin B = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{12}{13}$, $\cos B = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{5}{13}$.

b) Trong tam giác vuông ABH, ta có

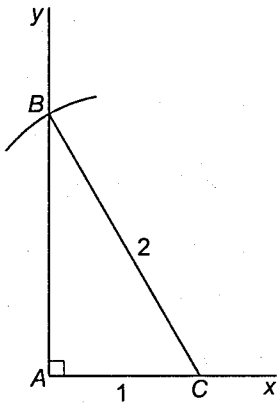
$$\sin B = \frac{AH}{AB} = \frac{AH}{5}.$$

Vậy $\dfrac{AH}{5} = \dfrac{12}{13}$, do đó $AH = \dfrac{60}{13}$.



Hình 4.2

Ví dụ 2 Dùng thước và compa vẽ góc nhọn α có $\sin\alpha = \frac{1}{2}$.



Hình 4.3

Giải. (H.4.3)

Vẽ một góc vuông xAy. Lấy điểm C thuộc Ax sao cho $AC = 1$ cm. Vẽ đường tròn tâm C bán kính bằng 2 cm, nó cắt tia Ay tại điểm B. Khi đó, trong tam giác ABC vuông tại A, ta có $\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$.

Vậy $\widehat{ABC}$ là góc nhọn cần vẽ.

Ví dụ 3

a) Không dùng MTCT hãy tính

$$\sin 45^\circ + \sin 46^\circ + \sin 47^\circ + \sin 48^\circ + \sin 49^\circ$$
$$- (\cos 45^\circ + \cos 44^\circ + \cos 43^\circ + \cos 42^\circ + \cos 41^\circ).$$

b) Không dùng MTCT, tính và chứng minh $\sin 30^\circ + \sin 45^\circ - \sin 60^\circ$ là một số dương.

Giải

a) Theo quan hệ giữa tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau, ta có:
$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$, $\sin 46^\circ = \cos 44^\circ$, $\sin 47^\circ = \cos 43^\circ$, $\sin 48^\circ = \cos 42^\circ$, $\sin 49^\circ = \cos 41^\circ$.

Từ đó

$\sin 45^\circ + \sin 46^\circ + \sin 47^\circ + \sin 48^\circ + \sin 49^\circ - (\cos 45^\circ + \cos 44^\circ + \cos 43^\circ + \cos 42^\circ + \cos 41^\circ) = 0$.

b) Theo bảng giác trị lượng giác của các góc đặc biệt, ta có

$$\sin 30^\circ + \sin 45^\circ - \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}\right).$$

Ta cần chứng minh $1 + \sqrt{2} - \sqrt{3} > 0$, tức là cần chứng minh $1 + \sqrt{2} > \sqrt{3}$.

Thực vậy, ta có $(1 + \sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 > 3 = (\sqrt{3})^2$ mà $1 + \sqrt{2}$ và $\sqrt{3}$ là những số dương nên suy ra $1 + \sqrt{2} > \sqrt{3}$.

Ví dụ 4 Cho tam giác vuông có cạnh huyền bằng 17 cm, một cạnh góc vuông bằng 8 cm. Tính các giá trị lượng giác sin, côsin, tang, côtang của các góc nhọn của tam giác đó.

Giải

Tam giác vuông ABC có cạnh huyền $BC = 17$ cm, cạnh $AB = 8$ cm.

Theo định lí Pythagore, ta có $AB^2 + AC^2 = BC^2$, suy ra

$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 17^2 - 8^2 = 225$, tức là $AC = 15$ (cm).

Vậy $\sin C = \cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{8}{17}$, $\cos C = \sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{15}{17}$,

$\tan B = \cot C = \frac{AC}{AB} = \frac{15}{8}$, $\cot B = \tan C = \frac{8}{15}$.

Ví dụ 5 Một bạn dùng thước và compa vẽ góc α có $\tan\alpha = \frac{4}{3}$ như sau: "Vẽ đoạn thẳng $OA = 3$ cm và một tia At vuông góc với OA. Trên tia At, lấy điểm B để $AB = 4$ cm và khẳng định $\tan \widehat{AOB} = \frac{AB}{OA} = \frac{4}{3}$".

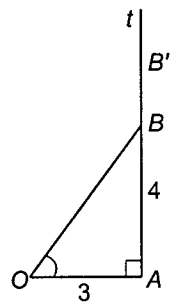
a) Hỏi điều đó có đúng không và vì sao?

b) Hỏi nếu lấy điểm B' trên tia At, B' khác A, B' ngày càng xa A thì có phải số đo góc AOB' ngày càng lớn lên và $\tan AOB'$ ngày càng lớn lên?

Giải (H.4.4)

a) Đúng thế vì trong tam giác AOB vuông tại A có $\tan \widehat{AOB} = \frac{AB}{OA} = \frac{4}{3}$.

b) Dùng thước đo góc đặt tâm tại gốc O, dễ thấy khi B' thuộc tia At ngày càng xa A thì góc AOB' có số đo ngày càng lớn và do AB' ngày càng lớn nên $\tan \widehat{AOB'} = \frac{AB'}{OA} = \frac{AB'}{3}$ ngày càng lớn.



Hình 4.4

Ví dụ 6 Cho tam giác ABC vuông tại A, $\hat{C} = 60^\circ$. Lấy điểm D sao cho B ở giữa A, D và $BD = BC$. Hãy tính tang của góc ADC.

Giải (H.4.5)

Đặt $AC = a$. Trong tam giác vuông ABC, ta có

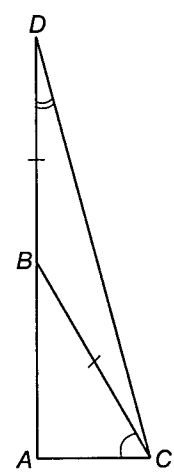
$\cos C = \frac{AC}{BC}$, mà $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ suy ra $\frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$, do đó $BC = 2AC = 2a$. Tương tự $\frac{AB}{AC} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

suy ra $AB = AC \cdot \sqrt{3} = a\sqrt{3}$.

Ta có $BD = BC = 2a$, do đó $AD = AB + BD = a\sqrt{3} + 2a$.

Trong tam giác vuông ADC, ta có

$$\tan \widehat{ADC} = \frac{AC}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{3}+2a} = \frac{1}{\sqrt{3}+2} = 2-\sqrt{3}.$$



Hình 4.5

BÀI TẬP

4.1. a) Vẽ tam giác ABC vuông tại A, $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm. Tính BC, $\sin B$, $\cos B$.

b) Vẽ tam giác MNP vuông tại M, $MN = 6$ cm, $MP = 8$ cm. Hỏi hai tam giác ABC, MNP có đồng dạng không? Tính $\sin N$, $\cos N$.

4.2. a) Chứng minh rằng với mọi góc nhọn $\alpha < 45^\circ$, ta có

$\sin(45^\circ - \alpha) = \cos(45^\circ + \alpha)$, $\cos(45^\circ - \alpha) = \sin(45^\circ + \alpha)$.

b) Không dùng MTCT, tính

$\sin 25^\circ + \sin 35^\circ + \sin 45^\circ - \cos 45^\circ - \cos 55^\circ - \cos 65^\circ$.

4.3. Khi góc α lần lượt bằng 10°, 20°, 30°, 40°, hãy dùng MTCT tính $\sin\alpha$ trong mỗi trường hợp (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba).

4.4. Hãy dùng MTCT, tìm số đo của góc nhọn α (làm tròn đến độ) trong mỗi trường hợp

a) Khi $\sin\alpha$ lần lượt bằng $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$;

b) Khi $\cos\alpha$ lần lượt bằng $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$.

4.5. Biết rằng với mỗi góc nhọn α, ta có $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, không dùng MTCT, hãy tính $\sin^2 25^\circ + \sin^2 35^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 65^\circ$.

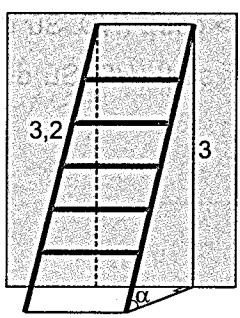
4.6. Một tam giác vuông có hai cạnh góc vuông đo được 5 cm, 12 cm. Hỏi sin của góc nhọn nhỏ nhất của tam giác đó bằng bao nhiêu?

4.7. Xét tam giác ABC vuông tại B, có $\widehat{A} = 30^\circ$. Tia Bt sao cho $\widehat{CBt} = 30^\circ$ cắt tia AC ở D, D nằm giữa A và C. Chứng minh rằng khoảng cách từ D đến đường thẳng BC bằng $\frac{AB}{4}$.

4.8. Vẽ góc α trong mỗi trường hợp:

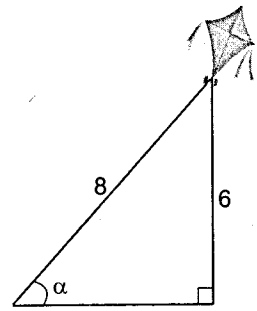
a) $\cos\alpha = 0{,}4$; b) $\tan\alpha = \frac{2}{3}$; c) $\cot\alpha = \frac{3}{4}$.

4.9. Một cái thang dài 3,2 m đặt tựa bức tường, đầu thang đạt đến độ cao 3 m thì thang tạo với mặt đất góc α xấp xỉ bằng bao nhiêu độ (H.4.6)?



Hình 4.6

4.10. Một cái diều có dây diều dài 8 m, khi dây diều căng thì diều bay ở độ cao 6 m. Hỏi khi đó dây diều tạo với phương ngang của mặt đất góc nhọn α xấp xỉ bằng bao nhiêu độ (H.4.7)?



Hình 4.7

4. 11. Chứng minh tam giác vuông có một góc nhọn có tang bằng 1 là tam giác vuông cân.

4.12. a) Tính các góc của tam giác vuông có một góc nhọn có tang bằng $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) Một hình chữ nhật có kích thước 3 và $\sqrt{3}$. Tính các góc tạo bởi đường chéo và cạnh của hình chữ nhật đó.

4.13. Dùng MTCT, hãy tìm tang và côtang của góc nhọn α khi α lần lượt bằng $10°, 20°, 30°, 40°$ (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba).

4.14. Tính tang, côtang của góc kề đáy của tam giác cân biết cạnh đáy dài 8 cm, đường cao ứng với đáy dài 5 cm.

4.15. Dùng định nghĩa tỉ số lượng giác $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ hãy chứng minh rằng:

a) $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$; b) $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.

4.16. Cho góc α có $\tan\alpha = \frac{3}{4}$. Tính $\sin\alpha$, $\cos\alpha$.

4.17. Với $\alpha < \beta < 90°$, chứng minh rằng:

a) $\cos\alpha > \cos\beta$ (*HD*. Sử dụng Ví dụ 5 và bài 4.15);

b) $\sin\alpha < \sin\beta$ (*HD*. Sử dụng công thức $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$).

BÀI 12 MỘT SỐ HỆ THỨC GIỮA CẠNH, GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG VÀ ỨNG DỤNG

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

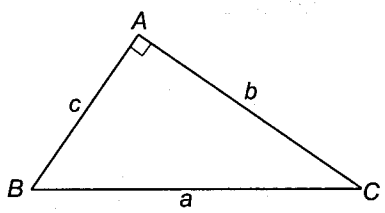
– Trong tam giác ABC vuông tại A, gọi a, b, c lần lượt là cạnh huyền BC, hai cạnh góc vuông AC, AB (H.4.8). Ta có

▪ hệ thức liên hệ giữa các cạnh góc vuông b, c với cạnh huyền a:

$b = a \cdot \sin B = a \cdot \cos C$; $c = a \cdot \sin C = a \cdot \cos B$;

▪ hệ thức liên hệ giữa các cạnh góc vuông b, c:

$b = c \cdot \tan B = c \cdot \cot C$; $c = b \cdot \tan C = b \cdot \cot B$.



Hình 4.8

– Bài toán giải tam giác vuông là bài toán tìm số đo các góc nhọn và độ dài các cạnh của tam giác.

B KĨ NĂNG GIẢI TOÁN

– Giải được tam giác vuông.
– Sử dụng được định nghĩa các tỉ số lượng giác của góc nhọn và các kiến thức cần nhớ ở trên để giải quyết một số bài toán thực tế.

Ví dụ 1 Cho tam giác vuông với cạnh huyền a và một cạnh góc vuông b. Hãy biểu diễn cạnh góc vuông còn lại c, giá trị lượng giác sin, côsin của hai góc nhọn của tam giác theo a và b. Khi $a = 13$, $b = 5$, hãy tính c, $\sin B$, $\cos B$ (B là đỉnh đối diện cạnh b); số đo của góc B (làm tròn đến phút).

Giải (H.4.9)

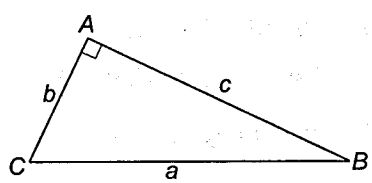
Theo định lí Pythagore, ta có $a^2 = b^2 + c^2$ nên $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Ta có $\sin B = \dfrac{b}{a}$, $\cos B = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$,

$\sin C = \cos B = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, $\cos C = \sin B = \dfrac{b}{a}$.

Khi $a = 13$, $b = 5$ thì $c = 12$, $\sin B = \dfrac{5}{13}$,

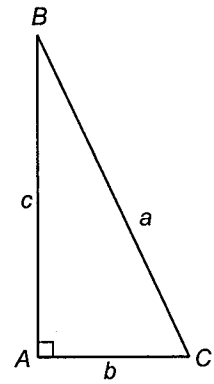
$\cos B = \dfrac{12}{13}$, $\hat{B} \approx 22°37'$.



Hình 4.9

Ví dụ 2 Cho tam giác vuông với hai cạnh góc vuông b, c. Hãy biểu diễn cạnh huyền a, $\tan B$ (đỉnh B đối diện cạnh b) của tam giác đó theo b và c. Khi $b = 8$, $c = 15$, hãy tính cạnh huyền a, $\tan B$, tìm số đo góc C (làm tròn đến phút).

Giải (H.4.10)



Hình 4.10

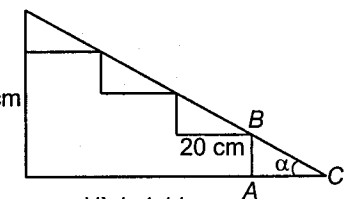
Theo định lí Pythagore, ta có $a^2 = b^2 + c^2$ nên $a = \sqrt{b^2 + c^2}$.

Ta có $\tan B = \dfrac{b}{c}$.

Khi $b = 8$, $c = 15$ thì $a = 17$, $\tan B = \dfrac{b}{c} = \dfrac{8}{15}$.

Ta có $\tan C = \cot B = \dfrac{1}{\tan B} = \dfrac{15}{8}$ nên $\widehat{C} \approx 61°56'$.

Ví dụ 3 Các bậc thang trong hình bên có kích thước như nhau. Tìm góc lên xuống α trong hình đó (làm tròn đến độ).



Hình 4.11

Giải (H.4.11)

Chiều cao của mỗi bậc là $44 : 4 = 11$ (cm). Tam giác ABC vuông tại A có $AB = 11$ cm, $AC = 20$ cm nên $\tan\alpha = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{11}{20}$.

Dùng MTCT, tìm được $\alpha \approx 29°$.

BÀI TẬP

4.18. Cho tam giác ABC vuông tại A với đường cao AH. Hãy tính $\cos C$ theo hai cách và suy ra $AC^2 = BC \cdot HC$.

4.19. Gọi AH là đường cao của tam giác ABC vuông tại A. Tính $\tan\widehat{ABH}$ và $\tan\widehat{CAH}$, suy ra $AH^2 = BH \cdot CH$.

4.20. Cho tam giác ABC vuông tại A, AH là đường cao. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}.$$

(*HD*. Ta có $\sin B = \frac{AH}{AB}$, $\sin C = \frac{AH}{AC}$, $\cos B = \sin C$ và áp dụng công thức $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ với mọi góc nhọn α).

4.21. Cho tam giác *ABC* có *BC* = 11 cm, $\widehat{ABC} = 38^\circ$, $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Gọi *H* là chân của đường vuông góc kẻ từ *A* đến *BC*. Hãy tính *AH*.

4.22. Giải tam giác *ABC* vuông tại *A*, với *AB* = *c*, *BC* = *a*, *CA* = *b* trong các trường hợp (cạnh làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba):

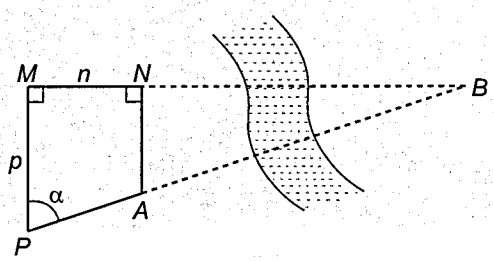
a) $a = 5$, $\hat{B} = 50^\circ$;

b) $b = 5$, $\hat{B} = 40^\circ$;

c) $b = 5$, $\hat{C} = 55^\circ$.

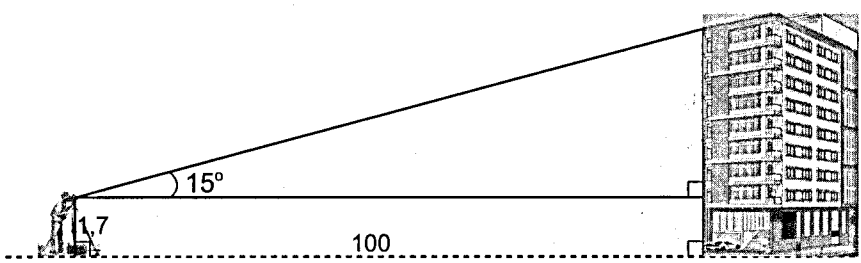
4.23. Cho *A*, *B* là hai địa điểm ở hai bên bờ sông, biết *AN* và *PM* cùng vuông góc *MN*, *MN* = *n* (mét), *MP* = *p* (mét), $p > n$ và $\widehat{MPA} = \alpha$ (H.4.12)

Chứng minh rằng: $AB = \frac{p\tan\alpha - n}{\sin\alpha}$.



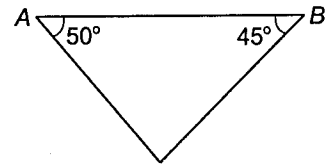
Hình 4.12

4.24. Một người đứng xa toà nhà 100 m, dùng giác kế thẳng đứng ngắm thấy điểm trên nóc nhà với góc nhìn 15° (so với phương nằm ngang) (H.4.13). Hỏi toà nhà cao bao nhiêu mét (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất), biết chiều cao của giác kế là 1,7 m?



Hình 4.13

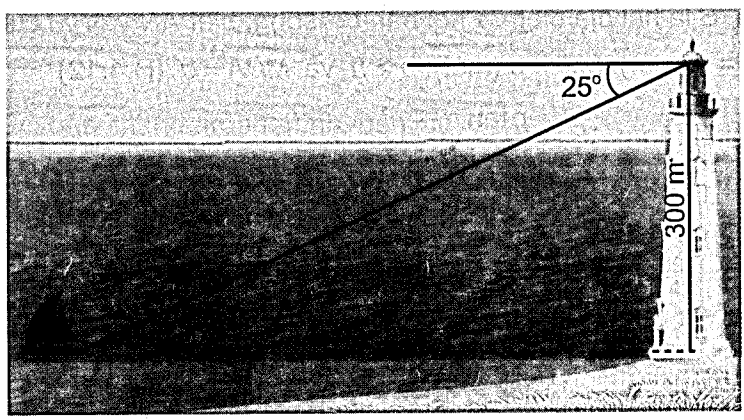
4.25. Hai trạm quan trắc tàu biển đặt ở hai mỏm núi A và B cách nhau 2 km, nhìn thấy chiếc tàu C ở phía xa với với $\widehat{CAB} = 50^\circ$, $\widehat{CBA} = 45^\circ$ (H.4.14). Hỏi tàu còn cách đường thẳng AB bao nhiêu mét?



Hình 4.14

4.26. Trong một trận chiến đấu, một máy bay của đối phương bay ở độ cao 1 800 m. Khẩu pháo cao xạ ngắm chiếc máy bay đó dưới một góc 35° so với phương nằm ngang. Tìm khoảng cách từ pháo cao xạ đến máy bay (làm tròn đến mét).

4.27. Từ một đài quan sát ở cạnh bờ biển, có độ cao 300 m so với mặt biển, nhìn thấy một con tàu dưới một góc 25° (so với phương nằm ngang của mực nước biển (H.4.15)). Hỏi khoảng cách từ tàu đến đài quan sát xấp xỉ bao nhiêu mét?



Hình 4.15

ÔN TẬP CHƯƠNG IV

A CÂU HỎI (Trắc nghiệm)

1. Tam giác ABC vuông tại A thì:

A. $\sin B + \cos C = 0$.

B. $\sin C + \cos B = 0$.

C. $\sin B - \cos C = 0$.

D. $\cos B + \cos C = 0$.

2. Tam giác ABC vuông tại A thì:

A. $\tan B + \tan C = 0$.

B. $\tan B + \cot C = 0$.

C. $\tan B - \cot C = 0$.

D. $\cot B + \cot C = 0$.

3. Chọn câu **sai:**

Góc nhọn α có $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ thì

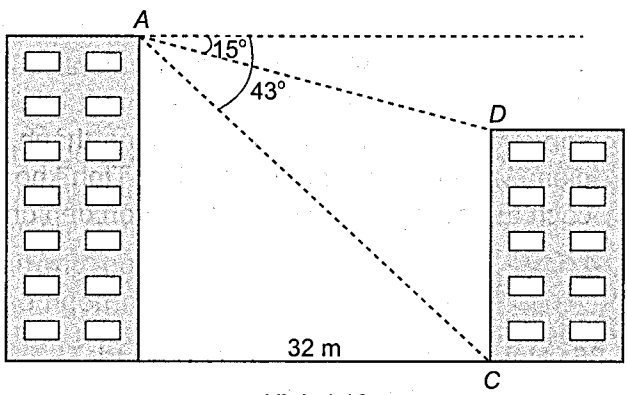
A. $\frac{1}{\tan\alpha} = \sqrt{3}$. B. $\frac{1}{\sin\alpha} = 2$. C. $\tan^2\alpha = \frac{1}{3}$. D. $\cos^2\alpha = \frac{1}{4}$.

B BÀI TẬP

4.28. Chứng minh nếu một góc nhọn của một tam giác vuông có số đo gấp đôi số đo góc nhọn kia thì tam giác đó có một cạnh dài gấp đôi một trong hai cạnh còn lại.

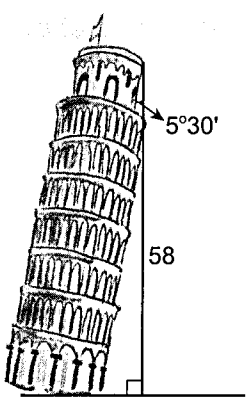
4.29. Xét điểm *B* nằm giữa hai điểm *A* và *H*. Giả sử có điểm *D* sao cho *DH* vuông góc với *AB* và $\widehat{DAH} = 15°$, $\widehat{DBH} = 30°$. Chứng minh rằng $HD = \frac{AB}{2}$.

4.30. Cho hai toà nhà cách nhau 32 m. Tại điểm *A* trên nóc toà nhà cao nhìn xuống nóc *D* và chân *C* của toà nhà thấp lần lượt theo các góc 15° và 43° (so với phương nằm ngang) (H.4.16). Tính chiều cao của hai toà nhà đó (làm tròn đến m).



Hình 4.16

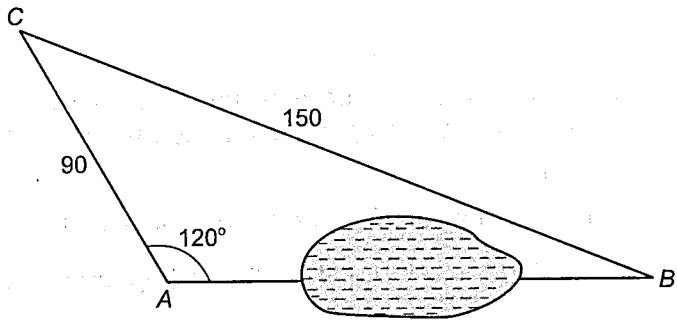
4.31. Chiều cao từ mặt đất đến đỉnh tháp Pisa ở Italia là 58 mét, tháp nghiêng góc 5°30' đối với phương thẳng đứng (H.4.17). Khi Mặt Trời chiếu vuông góc với mặt đất thì bóng của tháp dài bao nhiêu decimét?



Hình 4.17

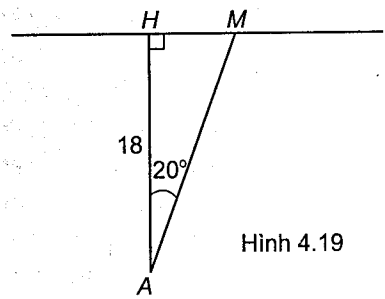
4.32. Cho tam giác ABC có đường cao AH, $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 45^\circ$ và cạnh $BC = 6$ cm. Chứng minh rằng $AH = 3(3 - \sqrt{3})$ cm.

4.33. Tính khoảng cách giữa hai địa điểm A, B ở hai bên hồ nước (không đo trực tiếp được), biết khoảng cách từ một địa điểm C đến A và đến B là $CA = 90$ m, $CB = 150$ m, $\widehat{CAB} = 120^\circ$ (làm tròn đến m) (H.4.18).



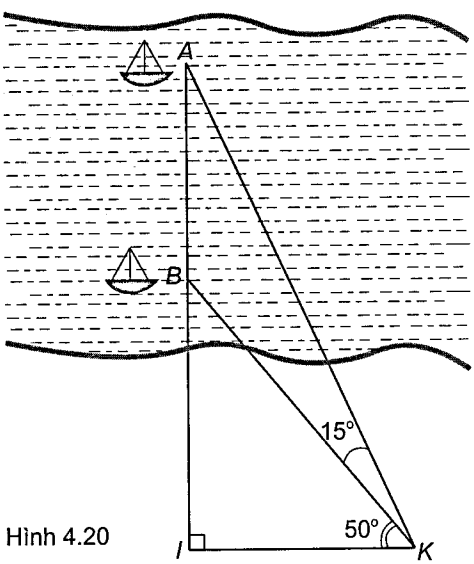
Hình 4.18

4.34. Một cầu thủ đứng cách khung thành 18 m, đá quả bóng sát mặt đất, nghiêng một góc 20° so với phương vuông góc với khung thành, tới điểm M của khung thành (H.4.19). Tính khoảng cách từ cầu thủ đến điểm M (làm tròn đến dm).



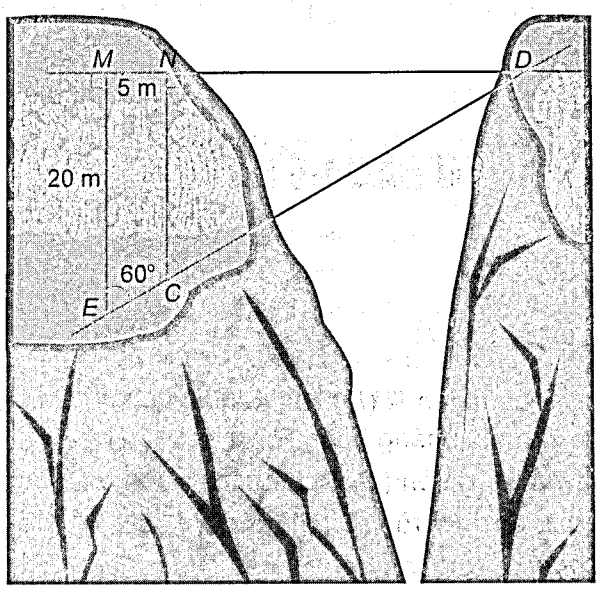
Hình 4.19

4.35. Hai chiếc thuyền A và B ở vị trí được minh hoạ như trong Hình 4.20. Tính khoảng cách giữa chúng (làm tròn đến m), biết $IK = 380$ m.



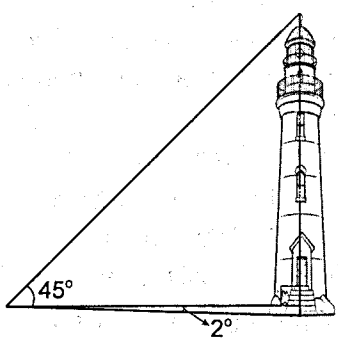
Hình 4.20

4.36. Tìm độ dài dây cáp mắc giữa hai cọc ở vị trí *C, D* trên hai bên bờ vực như trong Hình 4.21 (làm tròn đến mét).



Hình 4.21

4.37. Một người đứng cách chân ngọn hải đăng 50 m, nhìn xuống chân hải đăng dưới góc 2° và nhìn lên đỉnh ngọn hải đăng dưới góc 45° (so với đường nằm ngang) (H.4.22). Tính chiều cao ngọn hải đăng (làm tròn đến mét).



Hình 4.22

CHƯƠNG V

ĐƯỜNG TRÒN

BÀI 13 MỞ ĐẦU VỀ ĐƯỜNG TRÒN

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đường tròn tâm O bán kính R ($R > 0$), kí hiệu là $(O; R)$, là hình gồm tất cả các điểm cách điểm O một khoảng bằng R.

2. Điểm M *nằm trên* đường tròn $(O; R)$ nếu $OM = R$;

Điểm M *nằm trong* đường tròn $(O; R)$ nếu $OM < R$;

Điểm M *nằm ngoài* đường tròn $(O; R)$ nếu $OM > R$.

3. Hình tròn tâm O bán kính R là hình gồm các điểm nằm trong và nằm trên đường tròn $(O; R)$.

4. Hai điểm M và M' gọi là *đối xứng với nhau qua điểm* I (hay qua tâm I) nếu I là trung điểm của đoạn thẳng MM'.

5. Hai điểm M và M' gọi là *đối xứng với nhau qua đường thẳng* d (hay qua trục d) nếu d là đường trung trực của đoạn thẳng MM'.

6. Cho hai điểm M và M' đối xứng với nhau qua tâm O. Khi đó nếu $M \in (O)$ thì $M' \in (O)$. Vậy đường tròn là *hình có tâm đối xứng*. Mỗi đường tròn có đúng một tâm đối xứng; tâm của đường tròn chính là tâm đối xứng của nó.

7. Cho đường thẳng d đi qua điểm O và hai điểm M và M' đối xứng với nhau qua d. Khi đó, nếu $M \in (O)$ thì $M' \in (O)$. Vậy đường tròn là *hình có trục đối xứng*. Mỗi đường tròn có vô số trục đối xứng; mỗi đường thẳng đi qua tâm (mỗi đường kính) là một trục đối xứng của nó.

B KĨ NĂNG GIẢI TOÁN

– Chứng minh một điểm M nằm trên một đường tròn $(O; R)$ (hay $M \in (O; R)$).

– Chứng minh một điểm nằm trong hay nằm ngoài một đường tròn $(O; R)$ cho trước.

– Vẽ đường tròn khi biết tâm và bán kính, hoặc khi biết đường kính.

– Sử dụng tính đối xứng (tâm, trục) của đường tròn để nhận biết điểm thuộc đường tròn.

Ví dụ 1 Cho hai điểm A và B đối xứng với nhau qua đường thẳng d. Lấy một điểm O tuỳ ý thuộc d nhưng không thẳng hàng với A và B. Gọi C là điểm đối xứng với B qua O.

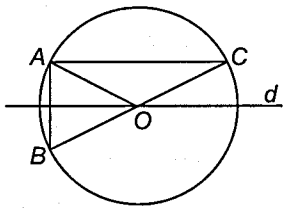
a) Xác định tâm và bán kính của đường tròn đi qua ba điểm A, B và C.

b) Chứng minh rằng ABC là một tam giác vuông.

Giải (H.5.1)

a) Do A và B đối xứng với nhau qua d nên d là đường trung trực của đoạn AB. Do đó từ O suy ra $OA = OB$. Mặt khác B và C đối xứng nhau qua O nên $OB = OC$.

Kết hợp lại ta có $OA = OB = OC$. Vậy O là tâm và OA (hoặc OB, hoặc OC) là bán kính của đường tròn đi qua ba điểm A, B và C.



Hình 5.1

b) Theo kết quả trên, tam giác ABC có đường trung tuyến AO bằng nửa cạnh BC nên ABC là tam giác vuông có BC là cạnh huyền (tức là $\widehat{A} = 90°$).

Ví dụ 2 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho ba điểm $A(2; 2)$, $B(-1; 1)$ và $C(3; -1)$.

a) Xác định vị trí của các điểm A, B và C đối với đường tròn $(O; 2\sqrt{2})$.

b) Tìm toạ độ của các điểm A' đối xứng với A qua trục tung, B' đối xứng với B qua gốc O và C' đối xứng với C qua trục hoành.

c) Dùng tính đối xứng của đường tròn để suy ra trong ba điểm A', B', C' điểm nào nằm trên đường tròn $(O; 2\sqrt{2})$.

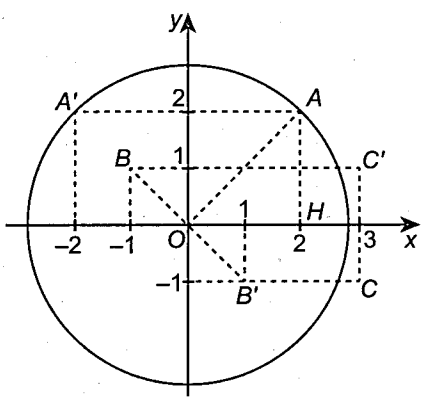
Giải. (H.5.2)

a) Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ A xuống trục hoành. Khi đó, điểm H có toạ độ là $(2; 0)$ và $AH \perp OH$.

Áp dụng định lí Pythagore vào tam giác vuông AOH, ta có

$OA^2 = OH^2 + HA^2 = 2^2 + 2^2 = 8$, suy ra $OA = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Do đó $A \in (O; 2\sqrt{2})$.

Tương tự, ta có $OB^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, nên $OB = \sqrt{2} < 2\sqrt{2}$. Do đó điểm B nằm trong $(O; 2\sqrt{2})$.



Hình 5.2

Với điểm C ta có $OC^2 = 3^2 + 1^2 = 10$, suy ra $OC = \sqrt{10} > \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Do đó, điểm C nằm ngoài $(O; 2\sqrt{2})$.

b) • Nếu A' đối xứng với $A(2; 2)$ qua trục tung thì:

+ AA' vuông góc với Oy, suy ra A và A' có cùng tung độ.

+ A và A' cách đều Oy, suy ra A và A' có hoành độ đối nhau.

Vậy A' có toạ độ là $(-2; 2)$.

• Nếu B' đối xứng với $B(-1; 1)$ qua gốc toạ độ thì O là trung điểm của đoạn BB', suy ra hoành độ của B và của B' đối nhau, tung độ của B và của B' đối nhau.

Vậy B' có toạ độ là $(1; -1)$.

• Nếu C' đối xứng với $C(3; -1)$ qua trục hoành thì:

+ CC' vuông góc với Ox, suy ra C và C' có cùng hoành độ.

+ C và C' cách đều Ox, suy ra C và C' có tung độ đối nhau.

Vậy toạ độ của C' là $(3; 1)$.

c) Ta đã biết đường tròn $(O; 2\sqrt{2})$ có tâm đối xứng O và hai trục đối xứng Ox và Oy. Do đó

+ A' đối xứng với A qua Oy, mà $A \in (O; 2\sqrt{2})$ nên $A' \in (O; 2\sqrt{2})$.

+ B' đối xứng với B qua tâm O, C' đối xứng với C qua Ox, mà hai điểm B, C không thuộc đường tròn $(O; 2\sqrt{2})$ nên B' và C' cũng không thuộc $(O; 2\sqrt{2})$.

BÀI TẬP

5.1. Các bánh xe (xe đạp, ô tô,...) đều có dạng hình tròn (với tâm tại trục của bánh xe). Hãy giải thích lí do.

5.2. Cho đường tròn (O) có bán kính bằng 2,5 cm và hai tia Ox, Oy vuông góc với nhau tại O. Trên tia Ox lấy điểm A sao cho $OA = 3$ cm; trên tia Oy lấy điểm B sao cho $OB = 4$ cm. Gọi M là trung điểm của đoạn AB. Chứng minh rằng điểm M nằm trên đường tròn (O).

5.3. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai điểm $A(0; -3)$ và $B(2; 0)$. Gọi C và D là các điểm lần lượt đối xứng với A và B qua O.

a) Xác định toạ độ của hai điểm C và D.

b) Xác định vị trí của các điểm A, B, C và D đối với đường tròn $(O; 3)$.

5.4. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $A(3; 1)$. Gọi B, C và D là các điểm đối xứng với A lần lượt qua trục hoành, qua gốc O và qua trục tung.

a) Xác định toạ độ của ba điểm B, C và D.

b) Có hay không một đường tròn đi qua bốn điểm A, B, C và D. Xác định tâm và bán kính của đường tròn đó, nếu có.

5.5. Cho đường tròn (O), đường kính AB và điểm M thuộc (O) (M không trùng với điểm nào trong hai điểm A và B). Trên (O) lấy điểm N nằm khác phía của M đối với đường thẳng AB sao cho $AM = BN$. Chứng minh rằng O là trung điểm của đoạn MN.

BÀI 14 CUNG VÀ DÂY CỦA MỘT ĐƯỜNG TRÒN

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Dây (dây cung): đoạn thẳng nối hai điểm của một đường tròn.

2. Đường kính: dây đi qua tâm của đường tròn.

3. Trong một đường tròn, đường kính là dây lớn nhất. Cụ thể hơn: nếu AB là một dây tuỳ ý của đường tròn $(O; R)$ thì $AB \leq 2R$; nói riêng, khi AB không đi qua tâm O thì $AB < 2R$.

4. Hai điểm A và B của một đường tròn chia đường tròn thành hai phần, mỗi phần là một *cung tròn* (*cung*), A và B là hai *đầu mút* (*mút*) của cung.

5. Góc ở tâm: góc có đỉnh trùng với tâm của đường tròn.

6. Cho hai điểm A và B thuộc đường tròn (O). Khi đó:

– Nếu góc AOB không bẹt thì cung nằm trong góc AOB gọi là *cung nhỏ*, cung còn lại là *cung lớn* của (O). Khi đó ta nói góc AOB *chắn cung* (nhỏ) AB.

– Nếu góc AOB là góc bẹt thì cung AB là một nửa đường tròn (có 2 nửa đường tròn chung hai mút A và B).

7. Số đo của cung AB, kí hiệu là sđ $\overset{\frown}{AB}$, được xác định như sau:

– Nếu $\overset{\frown}{AB}$ là nửa đường tròn thì sđ $\overset{\frown}{AB} = 180°$.

– Nếu $\overset{\frown}{AB}$ là cung nhỏ thì sđ $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AOB}$.

– Nếu $\overset{\frown}{AB}$ là cung lớn thì sđ $\overset{\frown}{AB} = 360° - \overset{\frown}{AOB}$.

8. Cung có số đo $n°$ gọi là cung $n°$. Cả đường tròn được coi là cung $360°$. Đôi khi ta cũng coi mỗi điểm thuộc (O) là một cung $0°$.

9. Hai cung trên một đường tròn gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng số đo.

10. Nếu điểm C thuộc cung AB thì sđ $\overset{\frown}{AB}$ = sđ $\overset{\frown}{AC}$ + sđ $\overset{\frown}{CB}$.

B KĨ NĂNG GIẢI TOÁN

– Tính độ dài và so sánh hai đoạn thẳng đựa vào quan hệ về độ dài của dây và đường kính trong một đường tròn.

– Tính số đo của cung và góc ở tâm trong một đường tròn.

Ví dụ 1 Hai góc đối diện A và C của tứ giác $ABCD$ là những góc vuông.

a) Chứng minh rằng $AC \leq BD$.

b) Cho biết $AC = BD$. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật.

Giải

a) Gọi O là trung điểm của BD. Khi đó tam giác vuông ABD có AO là trung tuyến.

Do đó $AO = \frac{1}{2}BD = OB = OD$, suy ra ba điểm A, B, D nằm trên đường tròn (O), đường kính BD.

Tương tự, bằng cách xét tam giác vuông CBD, ta có điểm C nằm trên đường tròn (O). Vậy AC là một dây của (O) đường kính BD, suy ra $AC \leq BD$.

b) Nếu $AC = BD$ thì AC cũng là một đường kính của đường tròn (O), nghĩa là dây AC đi qua O. Khi đó tứ giác $ABCD$ là hình bình hành (vì có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường). Hình bình hành đó có góc A vuông nên là hình chữ nhật.

Ví dụ 2 Cho tam giác cân ABC có $\widehat{A} = 40°$. Đường tròn đường kính AB cắt BC tại D (khác B).

a) Chứng minh rằng D là trung điểm của đoạn BC.

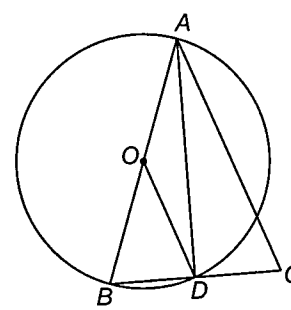
b) Tính số đo của cung nhỏ AD.

Giải (H.5.3)

a) Gọi O là tâm của đường tròn đường kính AB.

Khi đó DO là bán kính của (O) nên $DO = \frac{1}{2}AB$.

Tam giác DAB có trung tuyến DO bằng nửa cạnh AB nên là tam giác vuông tại D, suy ra $AD \perp BC$. Vậy AD là đường cao của tam giác cân ABC; do đó AD cũng là đường trung tuyến, suy ra D là trung điểm của cạnh BC.



Hình 5.3

b) Từ câu a, ta có OD là đường trung bình của tam giác BAC. Do đó $OD \parallel AC$, suy ra $\overset{\frown}{BOD} = \overset{\frown}{BAC} = 40°$ (hai góc đồng vị).

Mặt khác, ta có $\overset{\frown}{BOD} + \overset{\frown}{AOD} = 180°$, suy ra

$$\overset{\frown}{AOD} = 180° - \overset{\frown}{BOD} = 180° - 40° = 140°.$$

Vậy sđ $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AOD} = 140°$.

BÀI TẬP

5.6. Cho tam giác nhọn ABC, hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H.

Chứng minh rằng:

a) Bốn điểm A, E, H, D cùng thuộc một đường tròn.

b) $AH > DE$.

5.7. Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$). Gọi (O) là đường tròn đi qua ba điểm A, B, C và E là điểm trên cung nhỏ BC sao cho $\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{EC}$.

a) Chứng minh rằng ba điểm A, O, E thẳng hàng.

b) Gọi H là chân đường cao hạ từ A xuống BC. Chứng minh rằng $AH < AB < AE$.

5.8. Gọi H là trung điểm của dây AB không đi qua tâm của đường tròn (O).

a) Chứng minh rằng $OH \perp AB$.

b) Tính khoảng cách từ O đến AB, biết rằng $AB = 8$ cm và bán kính của (O) bằng 5 cm.

5.9. Kim giờ và kim phút của một chiếc đồng hồ tạo thành góc ở tâm có số đo là bao nhiêu độ vào mỗi thời điểm sau:

a) 3 giờ? b) 6 giờ?

c) 8 giờ? d) 11 giờ?

5.10. Cho ba điểm A, B và C nằm trên đường tròn (O) sao cho $\overset{\frown}{AOB} = 110°$ và sđ $\overset{\frown}{AC} = 50°$. Tính số đo của cung lớn BC.

BÀI 15 ĐỘ DÀI CỦA CUNG TRÒN. DIỆN TÍCH HÌNH QUẠT TRÒN VÀ HÌNH VÀNH KHUYÊN

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hình quạt tròn: phần hình tròn giới hạn bởi một cung tròn và hai bán kính đi qua hai đầu mút của cung đó.
2. Hình vành khuyên (vành khăn): phần nằm giữa hai đường tròn đồng tâm.
3. Công thức tính độ dài l của cung tròn $n°$ bán kính R: $l = \dfrac{n}{180}\pi R$.
4. Công thức tính diện tích S_q của hình quạt tròn bán kính R ứng với cung $n°$:

$$S_q = \frac{n}{360}\pi R^2 = \frac{l \cdot R}{2}.$$

5. Nếu C là chu vi, S là diện tích của hình tròn bán kính R (với cùng các kí hiệu nêu trên) thì:

$$\frac{l}{C} = \frac{S_q}{S} = \frac{n}{360}.$$

6. Công thức tính diện tích S_v của hình vành khuyên tạo bởi hai đường tròn đồng tâm có bán kính R và r:

$$S_v = \pi(R^2 - r^2) \text{ (với } R > r).$$

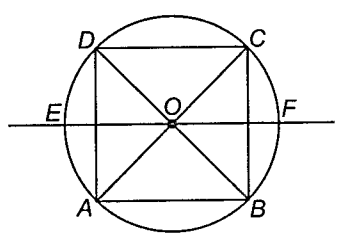
B KĨ NĂNG GIẢI TOÁN

Tính toán các đại lượng hình học liên quan đến số đo, độ dài cung và diện tích các hình giới hạn bởi đường thẳng và đường tròn.

Ví dụ 1 Cho hình vuông $ABCD$.

a) Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C và D cùng nằm trên một đường tròn. Gọi O là tâm của nó.

b) Một đường thẳng song song với AB cắt (O) tại E và F (H.5.4). Tính độ dài cung nhỏ AF và diện tích của hình quạt tròn ứng với cung đó, biết rằng độ dài cạnh hình vuông bằng $2\sqrt{3}$ cm.



Hình 5.4

Giải

a) AC và BD là hai đường chéo của hình vuông $ABCD$ nên nếu O là giao điểm của chúng thì ta có $OA = OB = OC = OD$. Do đó, bốn điểm A, B, C và D cùng nằm trên đường tròn $(O; OA)$.

b) Ta cần tính số đo của cung ABF. Hình vuông $ABCD$ cũng là hình thoi nên $AC \perp BD$, do đó $\overset{\frown}{AOB} = \overset{\frown}{BOC} = 90°$. Mặt khác, do $EF // AB$ mà $AB \perp BC$ nên $EF \perp BC$. Vậy OF là đường cao của tam giác cân BOC, suy ra OF là đường phân giác của góc BOC. Từ đó ta có $\overset{\frown}{BOF} = \overset{\frown}{COF}$ và do đó $\overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{CF}$. Vì F thuộc cung BC nên ta có $\text{sđ}\overset{\frown}{BC} = 90° = \text{sđ}\overset{\frown}{BF} + \text{sđ}\overset{\frown}{CF} = 2\text{sđ}\overset{\frown}{BF}$, suy ra

$\text{sđ}\overset{\frown}{BF} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BC} = 45°$ và $\text{sđ}\overset{\frown}{ABF} = \text{sđ}\overset{\frown}{AB} + \text{sđ}\overset{\frown}{BF} = 90° + 45° = 135°$.

Cuối cùng, gọi l là độ dài cung ABF, S_q là diện tích của hình quạt tròn tương ứng và R là bán kính đường tròn (O), ta có:

- Trong tam giác vuông AOB: $OA^2 + OB^2 = AB^2$ hay $2R^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2$, suy ra $R = \sqrt{6}$ (cm).
- Độ dài cung ABF là $l = \frac{135}{180}\pi \cdot \sqrt{6} = \frac{3\sqrt{6}}{4}\pi$ (cm);
- Diện tích hình quạt tròn tương ứng là $S_q = \frac{135}{360}\pi \cdot \left(\sqrt{6}\right)^2 = \frac{9}{4}\pi$ (cm^2).

Chú ý. Cũng có thể tính như sau: $S_q = \frac{l \cdot R}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{4}\pi \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{9}{4}\pi$.

Ví dụ 2 Từ một miếng kim loại hình tròn bán kính 10 cm, người ta định cắt bỏ một phần có dạng một hình tròn đồng tâm với hình tròn lớn (miếng kim loại ban đầu) để phần còn lại là một hình vành khăn có diện tích bằng diện tích của hình tròn bán kính 8 cm. Tính bán kính của hình tròn phần bị cắt bỏ.

Giải

Gọi R và r lần lượt là bán kính của hình tròn lớn và hình tròn nhỏ (phần bị cắt bỏ). Khi đó ta có $R = 10$ cm và diện tích của phần còn lại (hình vành khăn) sau khi cắt là

$$S_v = \pi(R^2 - r^2) = \pi(10^2 - r^2) \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Diện tích này bằng diện tích của hình tròn bán kính 8 cm nên ta có:

$$\pi(10^2 - r^2) = \pi \cdot 8^2.$$

Từ đó suy ra $100 - r^2 = 64$, hay $r^2 = 36$, suy ra $r = 6$ cm.

Vậy bán kính của hình tròn nhỏ (phần bị cắt bỏ) bằng 6 cm.

BÀI TẬP

5.11. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A} = 75°$ và $AB = 6$ cm. Vẽ đường tròn (D), bán kính 6 cm.

a) Chứng minh rằng $A, C \in (D)$.

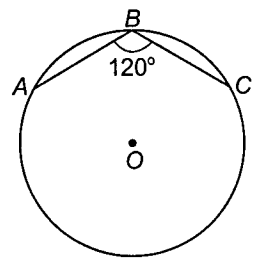
b) Tính độ dài cung nhỏ AC và diện tích hình quạt tròn ứng với cung nhỏ AC.

5.12. Độ dài của một cung tròn bằng $\frac{2}{5}$ chu vi của hình tròn có cùng bán kính. Tính diện tích của hình quạt tròn ứng với cung tròn đó, biết diện tích của hình tròn là $S = 20$ cm^2.

5.13. Trên bờ của một cái ao cá hình tròn, người ta dựng ba cái chòi câu cá tại các điểm A, B và C. Biết rằng tam giác ABC cân tại B và có $AB = BC = 10$ m, $\widehat{ABC} = 120°$ (H.5.5).

a) Tính bán kính của ao cá.

b) Tính độ dài quãng đường (men theo bờ ao) từ chòi A đến chòi B và chòi C (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

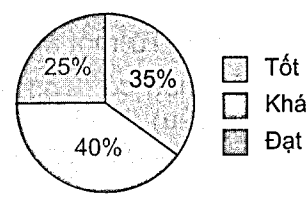


Hình 5.5

5.14. Giả định rằng Trái Đất quay xung quanh Mặt Trời theo một quỹ đạo tròn có bán kính khoảng 150 triệu kilômét và phải hết đúng một năm (365 ngày) để hoàn thành một vòng quay. Hãy tính quãng đường Trái Đất đi được trong một ngày (làm tròn đến hàng nghìn theo đơn vị kilômét).

5.15. Năm học vừa qua, kết quả xếp loại học lực cuối năm học sinh của một huyện được biểu thị trong biểu đồ hình quạt tròn như hình bên:

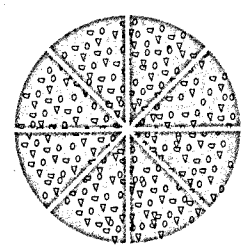
Hãy tìm số đo của các cung tròn tương ứng với mỗi hình quạt biểu thị các số liệu cho trên hình.



5.16. Một chiếc bánh pizza hình tròn được chia thành 8 miếng như nhau bởi 4 nhát cắt qua tâm (H.5.6).

a) Mỗi miếng bánh có dạng một hình quạt tròn ứng với cung bao nhiêu độ?

b) Người ta chọn một chiếc hộp có đáy là hình vuông để đặt lọt chiếc bánh vào trong đó (mà vẫn giữ nguyên hình tròn). Hỏi mỗi cạnh đáy của chiếc hộp đó tối thiểu phải dài bao nhiêu centimét (làm tròn đến hàng đơn vị), biết rằng diện tích bề mặt mỗi miếng bánh bằng 60 cm^2?


Hình 5.6

BÀI 16 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Ba vị trí tương đối của đường thẳng a và đường tròn $(O; R)$ (d là khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng a):

Vị trí tương đối	Số điểm chung	Quan hệ giữa d và R
a và $(O; R)$ cắt nhau	2	$d < R$
a và $(O; R)$ tiếp xúc với nhau	1	$d = R$
a và $(O; R)$ không giao nhau	0	$d > R$

2. Giao điểm: điểm chung của đường thẳng và đường tròn khi chúng cắt nhau. Đường thẳng cắt đường tròn tại hai giao điểm.

3. Tiếp điểm: điểm chung của đường thẳng và đường tròn khi chúng tiếp xúc với nhau.

4. Tiếp tuyến (của đường tròn): đường thẳng tiếp xúc với đường tròn.

5. Nếu đường thẳng a tiếp xúc với đường tròn (O) tại H thì $a \perp OH$.

6. Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến: Nếu đường thẳng a đi qua H, trong đó $H \in (O)$ và $a \perp OH$ thì a là tiếp tuyến của (O) tại H.

7. Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau của một đường tròn: Nếu hai tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) cắt nhau tại P thì:

- $PA = PB$;
- PO là phân giác của góc APB;
- OP là phân giác của góc AOB.

B KĨ NĂNG GIẢI TOÁN

– Vẽ hình theo mô tả của đề bài.

– Xác định vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn.

– Chứng minh một đường thẳng tiếp xúc với một đường tròn.

– Vận dụng tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau để chứng minh hay tính toán các đại lượng hình học.

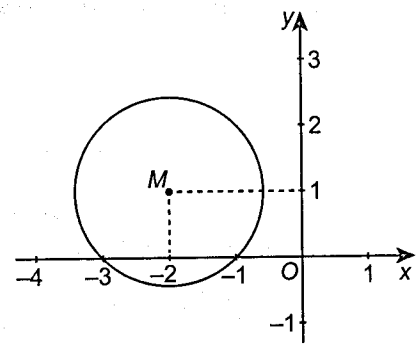
Ví dụ 1 Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, vẽ đường tròn tâm $M(-2; 1)$ có bán kính bằng $\sqrt{2}$. Hãy xét vị trí tương đối của đường tròn (M) với các trục toạ độ.

Giải (H.5.7)

• Do hoành độ của điểm M bằng -2 nên khoảng cách từ M đến trục tung bằng 2. Ta có $\sqrt{2} < 2$ nên đường tròn $(M; \sqrt{2})$ không giao nhau với trục tung.

• Do tung độ của điểm M bằng 1 nên khoảng cách từ M đến trục hoành bằng 1.

Ta có $\sqrt{2} > 1$ nên đường tròn $(M; \sqrt{2})$ và trục hoành cắt nhau.



Hình 5.7

Ví dụ 2 Cho góc xAy với tia phân giác Az và điểm D thuộc tia Ax. Đường thẳng qua D và vuông góc với Ax cắt Az tại O. Gọi E là chân đường vuông góc hạ từ O xuống Ay.

a) Chứng minh rằng đường tròn $(O; OD)$ tiếp xúc với Ax tại D và tiếp xúc với với Ay tại E.

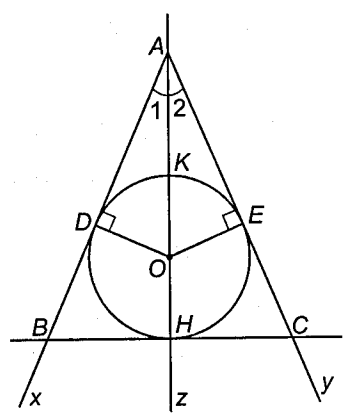
b) Gọi K và H là hai giao điểm của tia Oz với (O), sao cho K nằm giữa A và H. Tiếp tuyến với (O) tại H cắt Ax tại B và cắt Ay tại C. Chứng minh rằng ABC là tam giác cân.

c) Chứng minh rằng $AD + BH + CE$ bằng nửa chu vi của tam giác ABC.

Giải (H.5.8)

a) Theo đề bài, $OD \perp Ax$ và $OE \perp Ay$, mà O thuộc tia phân giác Az của góc xAy. Do đó O cách đều Ax và Ay, nghĩa là $OD = OE$. Vì vậy đường tròn $(O; OD)$ chứa hai điểm D và E. Hơn nữa, $Ax \perp OD$ tại đầu D của bán kính OD nên Ax là tiếp tuyến của (O) tại D. Tương tự, Ay là tiếp tuyến của (O) tại E.

b) Do BC tiếp xúc với (O) tại H nên $BC \perp OH$, tức là $BC \perp AH$. Hai tam giác vuông BAH và CAH có cạnh AH chung; $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ nên bằng nhau, suy ra $AB = AC$. Vậy ABC là tam giác cân tại A.



Hình 5.8

c) Xét các tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn (O), ta có: $AD = AE$, $BH = BD$ và $CE = CH$. Từ đó ta có $AD + BH + CE = AE + BD + CH$, suy ra:

$$2(AD + BH + CE) = (AD + BH + CE) + (AE + BD + CH)$$
$$= (AD + BD) + (BH + CH) + (CE + AE) = AB + BC + CA.$$

Suy ra $AD + BH + CE = \frac{1}{2}(AB + BC + CA)$ (bằng nửa chu vi của tam giác ABC).

BÀI TẬP

5.17. Cho đường tròn (O) và điểm P.

a) Giả sử $P \in (O)$. Vẽ đường thẳng a đi qua P và vuông góc với OP. Chứng minh rằng a là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại P.

b) Giả sử P nằm ngoài (O). Vẽ đường tròn đường kính OP. Đường tròn vừa vẽ cắt (O) tại A và B. Chứng minh rằng PA và PB là hai tiếp tuyến của (O).

5.18. Cho đường thẳng a, điểm M thuộc a và số dương R.

Vẽ đường thẳng b đi qua M và vuông góc với a. Trên b xác định điểm A sao cho $AM = R$ (đvđd). Chứng minh rằng đường tròn $(A; R)$ tiếp xúc với a tại M. Ta có thể vẽ được mấy đường tròn như thế?

Chú ý. Hai bài tập trên giới thiệu cách vẽ tiếp tuyến của một đường tròn (bài tập 5.17) và cách vẽ đường tròn tiếp xúc với một đường thẳng cho trước (bài tập 5.18). Các em cần theo cách đó để vẽ hình khi giải toán.

5.19. Cho đường tròn (O) và điểm M nằm bên ngoài (O). Từ M kẻ tiếp tuyến MA với (O), trong đó A là tiếp điểm. Đường thẳng qua A và vuông góc với MO cắt (O) tại B (khác A).

a) Chứng minh rằng MB là tiếp tuyến của (O);

b) Tính OM và diện tích phần của tam giác AMB nằm bên ngoài (O), biết bán kính của (O) bằng 3 cm và $\widehat{MAB} = 60°$.

5.20. Cho AM và AN là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn (O), trong đó M và N là hai tiếp điểm. Gọi E là một điểm thuộc cung nhỏ MN. Tiếp tuyến của (O) tại E cắt AM tại B và cắt AN tại C. Biết $AB = 10$ cm, $AC = 7$ cm và $BC = 6$ cm. Tính độ dài của các đoạn thẳng AM, AN, BM và CN.

5.21. Cho tam giác ABC vuông tại A, có đường cao AH.

a) Chứng minh rằng BC tiếp xúc với đường tròn (A) bán kính AH;

b) Gọi M và N là các điểm đối xứng với H lần lượt qua AB và AC. Chứng minh rằng BM và CN là hai tiếp tuyến của (A);

c) Chứng minh rằng MN là một đường kính của (A);

d) Tính diện tích của tứ giác $BMNC$, biết $HB = 2$ cm và $HC = 4{,}5$ cm.

BÀI 17 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Các vị trí tương đối của hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$, trong đó $R > R'$:

Số điểm chung	Vị trí tương đối		Hệ thức giữa R, R' và OO'
2	Hai đường tròn cắt nhau		$R - R' < OO' < R + R'$
1	Hai đường tròn tiếp xúc nhau	Tiếp xúc ngoài	$OO' = R + R'$
		Tiếp xúc trong	$OO' = R - R'$ $(R > R')$
0	Hai đường tròn không giao nhau	Ngoài nhau	$OO' > R + R'$
		$(O; R)$ đựng $(O'; R')$	$OO' < R - R'$
			$OO' = 0$ (O trùng với O') và $R > R'$ thì hai đường tròn đồng tâm.

Chú ý. Đôi khi, muốn diễn đạt rằng "hai đường tròn (O') và (O) tiếp xúc trong với nhau và (O') nằm bên trong đường tròn (O)", ta chỉ cần nói gọn: "đường tròn (O') tiếp xúc trong với đường tròn (O)".

2. Giao điểm: điểm chung của hai đường tròn cắt nhau.

3. Tiếp điểm: điểm chung duy nhất của hai đường tròn khi chúng tiếp xúc nhau.

4. Nếu hai đường tròn tiếp xúc với nhau thì tiếp điểm thẳng hàng với hai tâm.

B KĨ NĂNG GIẢI TOÁN

– Nhận biết vị trí tương đối của hai đường tròn dựa vào hình vẽ.

– Vẽ hình biểu thị hai đường tròn cắt nhau, tiếp xúc với nhau hay không giao nhau.

– Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn dựa vào hệ thức giữa hai bán kính và đoạn thẳng nối hai tâm.

Ví dụ 1 Cho hai đường tròn đồng tâm C_1 và C_2 có tâm O, hai bán kính lần lượt là 2 cm và 6 cm. Gọi O' là một điểm tuỳ ý trên đường tròn C_2. Trong mỗi trường hợp dưới đây, hãy xác định vị trí tương đối của $(O'; r)$ với đường tròn C_1.

a) $r = 3$ cm; b) $r = 4$ cm; c) $r = 5$ cm.

Giải. Gọi $R_1 = 2$ cm và $R_2 = 6$ cm lần lượt là bán kính của C_1 và C_2. Vì $O' \in C_2$ mà C_2 là đường tròn $(O; 6 \text{ cm})$ nên ta có $OO' = 6$ cm.

a) Nếu $r = 3$, ta có $6 > 2 + 3$, tức là $OO' > R_1 + r$ nên $(O'; r)$ và C_1 là hai đường tròn không giao nhau (ngoài nhau).

b) Nếu $r = 4$ cm, ta có $6 = 2 + 4$, tức là $OO' = R_1 + r$ nên $(O'; r)$ và C_1 là hai đường tròn tiếp xúc với nhau (tiếp xúc ngoài).

c) Nếu $r = 5$ cm, ta có $4 - 2 < 6 < 2 + 4$, suy ra $r - R_1 < OO' < r + R_1$ nên $(O'; r)$ và C_1 là hai đường tròn cắt nhau.

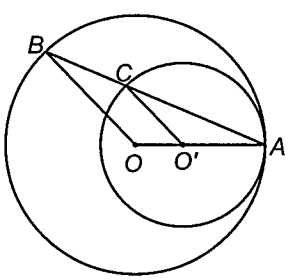
Ví dụ 2 Cho đường tròn (O) và dây AB không là đường kính của (O).

a) Gọi O' là một điểm tuỳ ý nằm giữa O và A. Đường thẳng đi qua O' và song song với OB cắt AB tại C. Hãy xác định vị trí tương đối của (O) và $(O'; O'C)$.

b) Vị trí tương đối của (O) và $(O'; O'C)$ sẽ như thế nào nếu O' thẳng hàng với O và A, nhưng nằm ngoài đoạn OA?

Giải

a) (H.5.9) Do $O'C \,//\, OB$ nên $\Delta O'AC \backsim \Delta OAB$. Mặt khác, OAB là tam giác cân $(OA = OB)$ nên $O'AC$ cũng là tam giác cân và $O'C = O'A$. Trên hình vẽ ta thấy $OO' = OA - O'A$, hay $OO' = OA - O'C$ (do $O'C = O'A$). Từ đó suy ra đường tròn $(O'; O'C)$ tiếp xúc trong với đường tròn $(O; OA)$.



Hình 5.9

b) Khi O' thẳng hàng với O và A, nhưng nằm ngoài đoạn OA, xảy ra hai trường hợp và đáp án cho mỗi trường hợp như sau (HS tự chứng minh, bài tập 5.23):

Trường hợp 1: O và O' nằm cùng phía đối với A (tức là O nằm giữa O' và A). Khi đó, đường tròn $(O; OA)$ tiếp xúc trong với đường tròn $(O'; O'C)$.

Trường hợp 2: O và O' nằm khác phía đối với A (tức là A nằm giữa O và O'). Khi đó, đường tròn $(O; OA)$ tiếp xúc ngoài với đường tròn $(O'; O'C)$.

BÀI TẬP

5.22. Hai đường tròn $(O; 2\text{ cm})$ và $(O'; 3\text{ cm})$ có vị trí tương đối như thế nào trong mỗi trường hợp sau:

a) $OO' = 4$ cm? b) $OO' = 5$ cm? c) $OO' = 6$ cm?

5.23. Vẽ hình và chứng minh phần b của Ví dụ 2.

5.24. Cho điểm A và đường tròn $(O; R)$ sao cho $R < OA < 3R$.

a) Chứng minh rằng đường tròn $(A; 2R)$ cắt đường tròn $(O; R)$. Gọi B là một trong hai giao điểm của chúng.

b) Gọi C là điểm đối xứng với B qua O. Nối A với C cắt (O) tại D (khác C). Chứng minh rằng $AD = DC$.

5.25. Cho I là trung điểm của đoạn AB. Xét các đường tròn $(I; IB)$ và $(A; AB)$.

a) Hai đường tròn (I) và (A) nói trên có vị trí tương đối như thế nào?

b) Đường thẳng đi qua B, cắt các đường tròn (I) và (A) lần lượt tại C và D. Hãy so sánh các độ dài BC và CD.

5.26. Cho tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng hai đường tròn $(B; BA)$ và $(C; CA)$ cắt nhau. Gọi A' là giao điểm khác A của hai đường tròn đó.

b) Chứng minh rằng A và A' đối xứng nhau qua BC.

c) Biết rằng $AA' = 24$ cm, $AB = 15$ cm và $AC = 13$ cm. Tính độ dài BC.

ÔN TẬP CHƯƠNG V

Một số kiến thức đã học thường dùng để giải toán trong chương này:

1. Cho đường trung trực d của đoạn thẳng AB. Khi đó:

– Nếu $M \in d$ thì $MA = MB$;

– Ngược lại, nếu $MA = MB$ thì $M \in d$.

2. Cho tam giác ABC và AM là đường trung tuyến của nó ($M \in BC$).

– Nếu ABC là tam giác vuông tại A ($\widehat{A} = 90°$) thì $AM = \dfrac{BC}{2}$.

– Ngược lại, nếu $AM = \dfrac{BC}{2}$ thì ABC là tam giác vuông tại A (hay $\widehat{A} = 90°$).

3. Cho tam giác ABC. Xét bốn yếu tố: đường cao AH, đường trung tuyến AM, đường phân giác của góc A và đường trung trực của đoạn BC.

– Nếu tam giác ABC cân tại A thì bốn yếu tố nói trên trùng nhau.

– Nếu có hai trong bốn yếu tố nói trên trùng nhau thì ABC là tam giác cân tại A.

4. Nếu một đường thẳng song song với cạnh BC của tam giác ABC và cắt hai cạnh AB, AC lần lượt tại B', C' thì $\Delta ABC \backsim \Delta AB'C'$.

5. Trong tam giác vuông ABC ($\widehat{A} = 90°$):

$$\sin B = \frac{AC}{BC};\quad \cos B = \frac{AB}{BC};\quad \tan B = \frac{AC}{AB};\quad \cot B = \frac{AB}{AC}.$$

6. Tính chất của tỉ lệ thức: Từ một trong các đẳng thức sau suy ra được các đẳng thức còn lại:

$$ad = bc;\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d};\ \frac{a}{c} = \frac{b}{d};\ \frac{d}{b} = \frac{c}{a};\ \frac{d}{c} = \frac{b}{a}\ (a, b, c, d \neq 0).$$

7. Tính chất của dãy hai tỉ số bằng nhau:

Nếu $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ thì $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{a-c}{b-d}$ (giả thiết các tỉ số đều có nghĩa).

A CÂU HỎI (Trắc nghiệm)

1. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn $(O; \sqrt{5})$, hai điểm $A(-\sqrt{3};\ 1)$ và $B(-1;\ 2)$. Khi đó xảy ra:

A. Điểm A nằm trong (O), điểm B nằm ngoài (O).

B. Điểm A nằm trong (O), điểm B nằm trên (O).

C. Điểm A nằm trên (O), điểm B nằm trong (O).

D. Điểm A nằm ngoài (O), điểm B nằm trên (O).

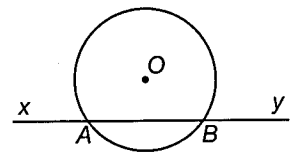
2. Cho đường thẳng xy cắt đường tròn (O) tại hai điểm A và B (H.5.10). Khi đó, các điểm thuộc đường thẳng xy và nằm trong đường tròn (O) là:

A. Các điểm thuộc tia AB.

B. Các điểm thuộc tia By.

C. Các điểm thuộc đoạn AB.

D. Các điểm nằm giữa A và B.



Hình 5.10

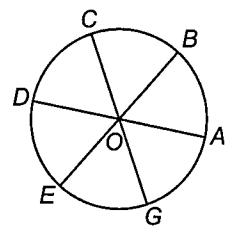
3. Cho Hình 5.11, trong đó tất cả các cung AB, BC, CD, DE, EG và GA đều có số đo bằng 60°. Khi đó:

A. Điểm đối xứng với A qua CG là B.

B. Điểm đối xứng với A qua CG là D.

C. Điểm đối xứng với A qua CG là E.

D. Điểm đối xứng với A qua CG là G.



Hình 5.11

4. Độ dài L (đơn vị cm) của cung tròn và diện tích S của hình quạt tròn (đơn vị cm^2) có cùng bán kính 9 cm và cùng ứng với cung 280° là:

A. $L = 7\pi$ và $S = 63\pi$.

B. $L = 14\pi$ và $S = 63\pi$.

C. $L = 7\pi$ và $S = 28\pi$.

D. $L = 14\pi$ và $S = 28\pi$.

5. Cho góc nhọn xOy và điểm M nằm trong góc đó. Biết rằng M nằm cách Ox một khoảng bằng 3 cm và cách Oy một khoảng bằng 2 cm. Khi đó

A. Nếu đường tròn (M) tiếp xúc với Ox thì (M) cắt Oy.

B. Nếu đường tròn (M) tiếp xúc với Ox thì (M) cũng tiếp xúc với Oy.

C. Nếu đường tròn (M) tiếp xúc với Ox thì (M) không giao nhau với Oy.

D. Nếu đường tròn (M) tiếp xúc với Oy thì cắt Ox.

6. Cho hai điểm A và B sao cho $AB = 7$ cm và đường tròn $(B; 4\text{ cm})$. Khi đó:

A. Hai đường tròn $(A; R)$ và (B) cắt nhau nếu $R < 11$ cm.

B. Hai đường tròn $(A; R)$ và (B) cắt nhau nếu $R > 3$ cm.

C. Hai đường tròn $(A; R)$ và (B) không giao nhau nếu $R > 11$ cm.

D. Hai đường tròn $(A; R)$ và (B) không giao nhau nếu $R \leq 3$ cm.

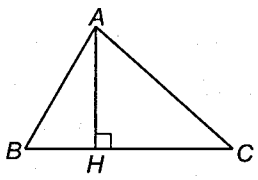
B BÀI TẬP

5.27. Cho tam giác ABC có $AB < AC$ và đường cao AH (H.5.12).

a) Trong các điểm B, H và C, điểm nào nằm trong, điểm nào nằm trên và điểm nào nằm ngoài đường tròn $(A; AB)$? Vì sao?

b) Xác định vị trí của điểm D trên đoạn AC trong mỗi trường hợp sau:

- Đường tròn (A) và đường tròn $(C; CD)$ tiếp xúc với nhau;
- Đường tròn (A) và đường tròn $(C; CD)$ cắt nhau;
- Đường tròn (A) và đường tròn $(C; CD)$ không giao nhau.



Hình 5.12

5.28. Cho hình thang cân $ABCD$ (AB // CD).

a) Chứng minh rằng đường trung trực d của AB cũng là đường trung trực của CD (từ đó suy ra hai điểm A và B đối xứng với nhau, C và D đối xứng với nhau qua d).

b) Giải thích tại sao nếu một đường tròn đi qua 3 điểm A, B và C thì nó cũng đi qua điểm D.

5.29. Giả sử CD là một dây song song với đường kính AB của đường tròn (O) sao cho $ABCD$ là một tứ giác lồi. Gọi E là trung điểm của đoạn CD.

a) Chứng minh rằng A đối xứng với B và C đối xứng với D qua đường thẳng OE.

b) Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là một hình thang cân.

c) Biết rằng $AB = 12$ cm và $\overset{\frown}{COD} = 100°$. Tính độ dài cung (nhỏ) AD và cung (lớn) ABC.

d) Với giả thiết ở câu c, tính diện tích hình quạt tròn ứng với cung nhỏ BD.

5.30. Cho tam giác vuông ABC ($\widehat{A} = 90°$) có $\widehat{C} = 30°$ và $AB = 3$ cm. Đường phân giác của góc B cắt AC tại D.

a) Chứng minh rằng đường tròn $(D; DA)$ tiếp xúc với cạnh BC.

b) Tính độ dài cung nằm trong góc BDC của đường tròn $(D; DA)$ và diện tích hình quạt tròn tương ứng với cung ấy.

c) Tính diện tích hình vành khuyên tạo bởi hai đường tròn $(D; DA)$ và $(D; DC)$.

5.31. Từ điểm P nằm ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến PA và PB đến đường tròn (A và B là hai tiếp điểm).

a) Chứng minh rằng $PO \perp AB$.

b) Gọi C là điểm đối xứng với A qua O. Chứng minh rằng BC // PO.

c) Tính độ dài các cạnh của tam giác PAB, biết $OA = 3$ cm và $OP = 5$ cm.

5.32. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Từ B và từ C kẻ hai đường thẳng tiếp xúc với đường tròn $(A; AH)$ lần lượt tại D và E. Chứng minh rằng:

a) Hai điểm D và E đối xứng với nhau qua A;

b) DE tiếp xúc với đường tròn đường kính BC.

5.33. Cho đường tròn (O), đường thẳng a tiếp xúc với (O) tại A, đường thẳng b tiếp xúc với (O) tại B sao cho $a \,//\, b$. Gọi C là một điểm tuỳ ý thuộc (O), khác A và B. Tiếp tuyến c của (O) tại C cắt a và b lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh AB là một đường kính của (O).

b) Gọi D, P và Q lần lượt là các điểm đối xứng với C, M và N qua tâm O. Chứng minh rằng $D \in (O)$, $P \in b$ và $Q \in a$.

c) Chứng minh rằng PQ tiếp xúc với (O) tại D.

d) Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là một hình thoi.

5.34. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc ngoài với nhau tại A, hai điểm $B \in (O)$ và $C \in (O')$ sao cho B và C nằm cùng phía đối với đường thẳng OO' và $OB \,//\, O'C$.

a) Chứng minh góc BAC là góc vuông.

b) Cho biết $R = 3$ cm, $R' = 1$ cm và BC cắt OO' tại D. Tính độ dài đoạn OD.

5.35. Cho đường tròn tâm O, đường kính MN. Một đường tròn (N) cắt (O) tại A và B.

a) Chứng minh rằng MA và MB là hai tiếp tuyến của (N).

b) Đường thẳng qua N và vuông góc với NA cắt MB tại C. Chứng minh hai điểm M và N đối xứng với nhau qua OC.

c) Đường thẳng qua M và vuông góc với MA cắt NB tại D. Chứng minh ba điểm O, C và D thẳng hàng.

LỜI GIẢI - HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

CHƯƠNG I. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

BÀI 1. KHÁI NIỆM PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1.1. a) Ta có bảng giá trị thoả mãn:

x	-2	-1	0	1	2
y	-7	-5	-3	-1	1

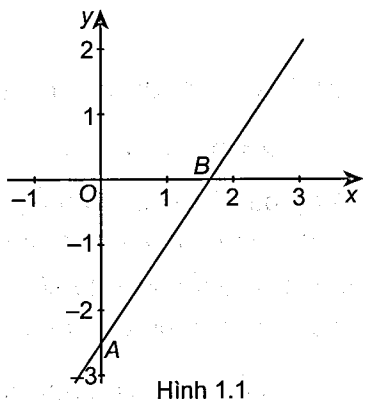
Vậy 5 nghiệm của phương trình đã cho là:

$$(-2;-7),\ (-1;-5),\ (0;-3),\ (1;-1),\ (2;1).$$

b) Ta có $y = 2x - 3$. Với mỗi giá trị x tuỳ ý cho trước, ta luôn tìm được một giá trị y tương ứng. Do đó, phương trình đã cho có vô số nghiệm.

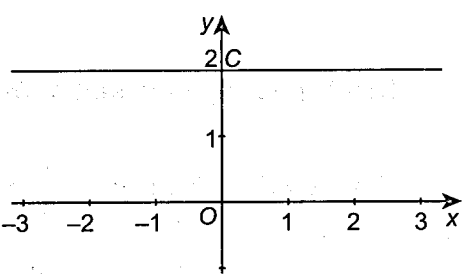
1.2. a) Ta viết phương trình đã cho dưới dạng $y = 1{,}5x - 2{,}5$. Khi đó, nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là: $(x;\ 1{,}5x - 2{,}5)$ với $x \in \mathbb{R}$ tuỳ ý.

Ta có hai điểm $A(0;-2{,}5)$ và $B\left(\frac{5}{3};0\right)$ nằm trên đường thẳng $d: 3x - 2y = 5$ nên hình biểu diễn tất cả các nghiệm của phương trình đã cho như Hình 1.1.



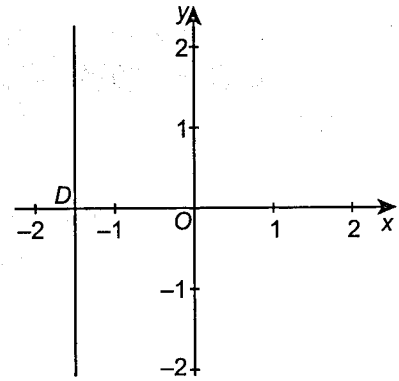
Hình 1.1

b) Ta viết phương trình đã cho dưới dạng $y = 2$. Phương trình đã cho có nghiệm là $(x;\ 2)$ với $x \in \mathbb{R}$ tuỳ ý. Mỗi nghiệm là toạ độ của một điểm thuộc đường thẳng song song với trục hoành và cắt trục tung tại điểm $C(0;2)$. Ta có hình biểu diễn tất cả các nghiệm của phương trình đã cho như Hình 1.2.



Hình 1.2

c) Ta viết lại phương trình đã cho dưới dạng $x=-1,5$. Phương trình đã cho có nghiệm là $(-1,5;\ y)$ với $y\in\mathbb{R}$ tuỳ ý. Mỗi nghiệm của phương trình đã cho là toạ độ của một điểm thuộc đường thẳng song song với trục tung và cắt trục hoành tại điểm $D(-1,5;\ 0)$. Ta có hình biểu diễn tất cả các nghiệm của phương trình đã cho như Hình 1.3.



Hình 1.3

1.3. a) Vì $(1;\ -2)$ là một nghiệm của phương trình $mx+y=-2$ nên ta có $m\cdot 1+(-2)=-2$ hay $m-2=-2$, suy ra $m=0$.

Vậy, với $m=0$ thì cặp số $(1;\ -2)$ là một nghiệm của phương trình.

b) Theo kết quả câu a, ta có $m=0$ nên phương trình trở thành $0\cdot x+y=-2$.

Vậy phương trình có nghiệm tổng quát là $(x;\ -2)$ với $x\in\mathbb{R}$ tuỳ ý.

1.4. a) Theo đề bài, ta có phương trình bậc nhất hai ẩn đối với x và y:

$$2x+5y=25. \qquad (*)$$

b) Ta viết $(*)$ dưới dạng $y=-0,4x+5$.

Cho $x=5$, ta được $y=-0,4\cdot 5+5=3$.

Vậy bác Hương có thể trả lại 25 nghìn đồng tiền thừa cho người mua hàng bằng 5 tờ tiền 2 nghìn đồng và 3 tờ tiền 5 nghìn đồng.

1.5. Gọi x, y lần lượt là số ống loại 3 m và 5 m cần dùng để lắp đường ống dẫn nước cho đoạn phố $(x,y\in\mathbb{N})$.

Theo đề bài, ta có phương trình bậc nhất hai ẩn x và y:

$$3x+5y=65.$$

Ta viết phương trình trên dưới dạng $y=-\frac{3}{5}x+13$. Khi đó:

Thay $x=5$ ta được $y=-\frac{3}{5}\cdot 5+13=10$;

Thay $x=10$ ta được $y=-\frac{3}{5}\cdot 10+13=7$.

Vậy hai phương án có thể dùng để lắp ống cho đoạn phố: hoặc dùng 5 ống loại 3 m và 10 ống loại 5 m; hoặc dùng 10 ống loại 3 m và 7 ống loại 5 m.

1.6. a) Với $x=-2$ và $y=2$ ta có: $x+3y=-2+3\cdot 2=4$ nên $(-2;\ 2)$ là nghiệm của phương trình (1).

Với $x=1$ và $y=1$ ta có: $x+3y=1+3\cdot 1=4$ nên $(1;\ 1)$ là nghiệm của phương trình (1).

Với $x=4$ và $y=1$ ta có: $x+3y=4+3\cdot 1=7\neq 4$ nên $(4;\ 1)$ không là nghiệm của phương trình (1).

Với $x=8$ và $y=-2$ ta có: $x+3y=8+3\cdot(-2)=2\neq 4$ nên $(8;\ -2)$ không là nghiệm của phương trình (1).

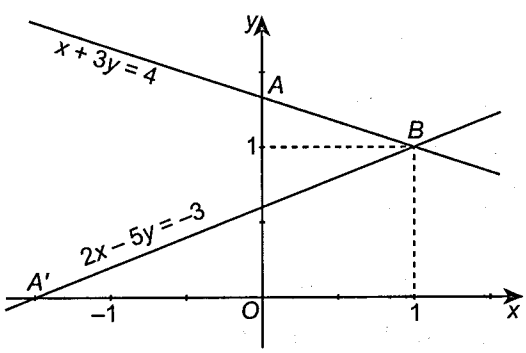
Vậy ta có các cặp số $(-2;\ 2)$ và $(1;\ 1)$ là nghiệm của phương trình (1).

b) Vì nghiệm của hệ gồm hai phương trình (1) và (2) thoả mãn phương trình (1) nên ta chỉ cần kiểm tra hai cặp số là $(-2;\ 2)$ và $(1;\ 1)$.

Với $x=-2$ và $y=2$ ta có: $2x-5y=2\cdot(-2)-5\cdot 2=-14\neq -3$ nên $(-2;\ 2)$ không là nghiệm của phương trình (2) và do đó không là nghiệm của hệ phương trình gồm (1) và (2).

Với $x=1$ và $y=1$ ta có: $2x-5y=2\cdot 1-5\cdot 1=-3$ nên $(1;\ 1)$ cũng là nghiệm của phương trình (2) và do đó $(1;\ 1)$ là nghiệm của hệ phương trình gồm (1) và (2).

c) Ta có: điểm $A\left(0;\ \frac{4}{3}\right)$, $B(1;\ 1)$ cùng nằm trên đường d: $x + 3y = 4$ và $A'(-1{,}5;\ 0)$, $B(1;\ 1)$ cùng nằm trên đường d': $2x - 5y = -3$, từ đây ta có hình minh hoạ như Hình 1.4.



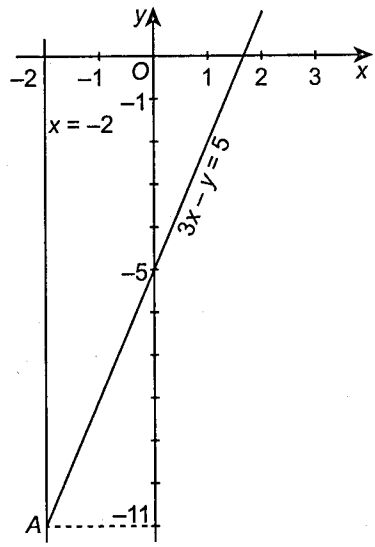
Hình 1.4

1.7. Ta có $(1; -2)$ thoả mãn phương trình $ax - 2y = 1$ nên $a \cdot 1 - 2 \cdot (-2) = 1$ hay $a = -3$.

Ta có $(1; -2)$ thoả mãn phương trình $x + by = 3$ nên $1 + (-2) \cdot b = 3$ hay $b = -1$.

Vậy với $a = -3$ và $b = -1$ thì hai phương trình $ax - 2y = 1$ và $x + by = 3$ nhận $(1; -2)$ là nghiệm chung.

1.8. a) Ta viết phương trình $2x = -4$ dưới dạng $x = -2$, khi đó đường biểu diễn tất cả các nghiệm của phương trình $2x = -4$ là đường thẳng d song song với trục tung và đi qua điểm $(-2; 0)$.

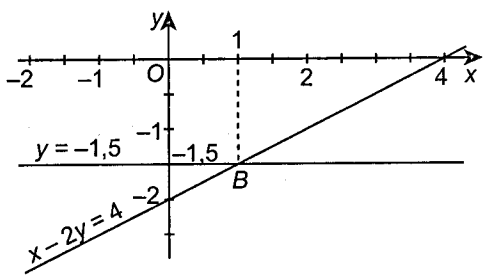


Hình 1.5

Đường thẳng $d': 3x - y = 5$ qua hai điểm $(0; -5)$ và $\left(\frac{5}{3}; 0\right)$ là đường biểu diễn tất cả các nghiệm của phương trình $3x - y = 5$.

Từ đó ta có Hình 1.5. Trên hình ta thấy điểm $A(-2; -11)$ là giao điểm của hai đường thẳng d và d', do đó $A(-2; -11)$ là nghiệm của hệ phương trình đã cho và nghiệm này là duy nhất.

b) Đường thẳng $d: x - 2y = 4$ qua hai điểm $(0; -2)$ và $(4; 0)$ là đường biểu diễn tất cả các nghiệm của phương trình $x - 2y = 4$.



Hình 1.6

Ta viết phương trình $2y = -3$ dưới dạng $y = -\frac{3}{2}$, khi đó đường biểu diễn tất cả các nghiệm của phương trình $2y = -3$ là đường thẳng d' song song với trục hoành và đi qua điểm $\left(0; -\frac{3}{2}\right)$.

Từ đó ta có Hình 1.6. Trên hình ta thấy $B(1; -1{,}5)$ là giao điểm của hai đường thẳng d và d' nên $B(1; -1{,}5)$ là nghiệm của hệ phương trình đã cho và nghiệm này là duy nhất.

BÀI 2. GIẢI HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1.9. a) Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có $x = 8 - 2y$. Thế vào phương trình thứ hai ta được $\frac{1}{2}(8-2y) - y = 18$ hay $y = -7$. Thay $y = -7$ vào phương trình thứ nhất trong hệ ta thu được $x = 8 - 2\cdot(-7) = 22$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(22; -7)$.

b) Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có $x = 3{,}5 - 2{,}5y$. Thế vào phương trình thứ hai ta được $4(3{,}5 - 2{,}5y) + 10y = 9$ hay $14 + 0\cdot y = 9$. Do không có giá trị nào của y thoả mãn $14 + 0\cdot y = 9$ nên hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

c) Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$. Thế vào phương trình thứ hai ta được $\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{6}$ hay $0\cdot x = 0$. Hệ thức này luôn thoả mãn với mọi giá trị tuỳ ý của x.

Với giá trị tuỳ ý của x, giá trị của y được tính bởi hệ thức $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $\left(x; \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right)$ với $x \in \mathbb{R}$ tuỳ ý.

1.10. a) Nhân hai vế của phương trình thứ nhất với 2 và hai vế của phương trình thứ hai với 7 ta được:

$$\begin{cases} 6x - 14y = -28 \\ 35x + 14y = 315. \end{cases}$$

Cộng từng vế hai phương trình của hệ mới ta được $41x = 287$ hay $x = 7$.

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ đã cho ta được $y = 5$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(7; 5)$.

b) Nhân hai vế của phương trình thứ nhất với 2 ta được:

$$\begin{cases} 2x - y = -6 \\ 2x - y = 6. \end{cases}$$

Trừ từng vế hai phương trình của hệ mới ta được $0\cdot x + 0\cdot y = -12$. Do không có giá trị nào của x và y thoả mãn hệ thức $0\cdot x + 0\cdot y = -12$ nên hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

c) Nhân hai vế của phương trình thứ hai với –3 ta được:

$$\begin{cases} 2x+3y=3 \\ -2x-3y=-3. \end{cases}$$

Cộng từng vế hai phương trình của hệ mới ta được $0x+0y=0$. Hệ thức này thoả mãn với mọi giá trị tuỳ ý của x và y.

Với giá trị x tuỳ ý, giá trị của y được xác định bởi hệ thức $y=1-\frac{2}{3}x$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm là: $\left(x; 1-\frac{2}{3}x\right)$ với $x\in\mathbb{R}$ tuỳ ý.

1.11. a) Hệ phương trình đã cho có nghiệm là $\left(\frac{4\sqrt{3}}{9}; -\frac{1}{9}\right)$.

b) Hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

c) Hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

1.12. Vì đường thẳng $y=ax+b$ đi qua hai điểm $(4; 1)$ và $(-4; -3)$ nên ta có hệ hai phương trình bậc nhất đối với hai ẩn a và b như sau:

$$\begin{cases} 4a+b=1 \\ -4a+b=-3. \end{cases}$$

Cộng từng vế hai phương trình của hệ ta được $2b=-2$ hay $b=-1$.

Thay $b=-1$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được $a=\frac{1}{2}$.

Vậy với $a=\frac{1}{2}$, $b=-1$ thì đường thẳng $y=ax+b$ đi qua hai điểm $(4; 1)$ và $(-4; -3)$.

1.13. a) Với $m=1$, ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x+3y=1 \\ 2x+y=5. \end{cases}$

Nhân hai vế của phương trình thứ nhất với –2 ta được: $\begin{cases} -2x-6y=-2 \\ 2x+y=5. \end{cases}$

Cộng từng vế hai phương trình của hệ mới ta có $-5y=3$ hay $y=-0,6$.

Thay $y=-0,6$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$x=1-3\cdot(-0,6)=2,8.$$

b) Với $m = 6$, ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x + 6y = 5. \end{cases}$

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có $x = 1 - 3y$. Thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được $2(1-3y) + 6y = 5$ hay $2 + 0 \cdot y = 5$. Do không có giá trị nào của y thoả mãn hệ thức $2 + 0 \cdot y = 5$ nên hệ vô nghiệm.

1.14. Xét hệ phương trình: $\begin{cases} 0{,}06Y - 5\,000r = 240 \\ 0{,}06Y + 6\,000r = 900. \end{cases}$

Trừ từng vế hai phương trình của hệ ta được $11\,000r = 660$ hay $r = 0{,}06$. Thay $r = 0{,}06$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được $Y = 9\,000$.

Vậy mức thu nhập cân bằng là 9 tỉ đô la và lãi suất cân bằng là 0,06 (tức là 6%).

1.15. Từ hai phương trình cung và cầu ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} p + 0{,}00001x = 150 \\ p - 0{,}00002x = 60. \end{cases}$$

Trừ từng vế hai phương trình của hệ ta được $0{,}00003x = 90$ hay $x = 3\,000\,000$.

Thay $x = 3\,000\,000$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được $p = 120$.

Vậy điểm cân bằng của thị trường thiết bị kĩ thuật số cá nhân mới là $(120; 3\,000\,000)$.

1.16. a) Do số câu hỏi nhiều lựa chọn gấp đôi số câu đúng/sai nên ta có phương trình $y = 2x$ hay $2x - y = 0$.

Mặt khác, tổng số điểm là 100, mỗi câu đúng/sai tính 2 điểm và mỗi câu nhiều lựa chọn tính 4 điểm nên ta có phương trình $2x + 4y = 100$.

Vậy ta có hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2x + 4y = 100. \end{cases}$

b) Ta giải hệ phương trình nhận được ở câu a. Trừ từng vế hai phương trình của hệ ta được $5y = 100$ hay $y = 20$. Thay $y = 20$ vào phương trình thứ nhất của hệ, ta có $x = 10$.

Vậy trong bài kiểm tra đó, số câu hỏi đúng/sai là 10 câu và số câu hỏi nhiều lựa chọn là 20 câu.

BÀI 3. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

1.17. Gọi x và y lần lượt là số lần phóng vệ tinh thương mại và phi thương mại trong năm 2025. Điều kiện: $x, y \in \mathbb{N}^*$.

Vì tổng số lần phóng vệ tinh thương mại và phi thương mại trong năm 2005 là 55 lần nên ta có phương trình $x + y = 55$.

Mặt khác, số lần phóng vệ tinh phi thương mại nhiều hơn 1 lần so với hai lần số lần phóng vệ tinh thương mại nên ta có phương trình $y = 2x + 1$.

Do đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 55 \\ y = 2x + 1. \end{cases}$

Thế hệ thức thứ hai trong hệ phương trình trên vào phương trình thứ nhất ta được $3x + 1 = 55$ hay $x = 18$. Do đó, $y = 2 \cdot 18 + 1 = 37$. Ta có $x = 18$, $y = 37$ thoả mãn điều kiện của ẩn.

Vậy số lần phóng vệ tinh thương mại là 18 lần và số lần phóng vệ tinh phi thương mại là 37 lần.

1.18. Đổi 45 phút = $\frac{3}{4}$ giờ.

Gọi vận tốc thực của ca nô là x (km/h) và vận tốc dòng nước là y (km/h). Do vận tốc thực của ca nô phải thắng được vận tốc dòng nước nên điều kiện của ẩn là $x > y > 0$.

Vì ca nô đi ngược dòng 6 km hết $\frac{3}{2}$ giờ nên ta có phương trình $x - y = \frac{6 \cdot 2}{3} = 4.$

Mặt khác, ca nô đi xuôi dòng 6 km hết $\frac{3}{4}$ giờ nên ta có phương trình $x + y = \frac{6 \cdot 4}{3} = 8.$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 8. \end{cases}$

Cộng hai vế hai phương trình của hệ ta được $2x = 12$ hay $x = 6$. Thay $x = 6$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được $y = 2$. Ta có $x = 6$, $y = 2$ thoả mãn điều kiện của ẩn.

Vậy vận tốc thực của ca nô là 6 km/h và vận tốc dòng nước là 2 km/h.

1.19. Gọi x là số lít cồn nồng độ 10% và y là số lít cồn nồng độ 70% cần dùng. Điều kiện của ẩn: $x > 0,\ y > 0$.

Theo đề bài tổng số lít dung dịch sau pha chế là 1 000 lít nên ta có phương trình $x + y = 1\,000$.

Mặt khác, dung dịch thu được có nồng độ 16% nên ta có phương trình

$$0{,}1x + 0{,}7y = 0{,}16 \cdot 1\,000 = 160.$$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 1\,000 \\ 0{,}1x + 0{,}7y = 160. \end{cases}$

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có $x = 1\,000 - y$. Thế vào phương trình thứ hai ta được $0{,}1(1\,000 - y) + 0{,}7y = 160$ hay $y = 100$. Thay $y = 100$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được $x = 900$. Ta có $x = 900,\ y = 100$ thoả mãn điều kiện của ẩn.

Vậy người ta cần dùng 900 lít cồn nồng độ 10% và 100 lít cồn nồng độ 70%.

1.20. a) Gọi x, y (phút) lần lượt là thời gian mà chị Hương dành cho thể dục nhịp điệu và giãn cơ. Điều kiện của ẩn: $x > 0,\ y > 0$.

Theo đề bài, mỗi buổi sáng chị Hương tập 40 phút nên ta có phương trình

$$x + y = 40.$$

Mặt khác, theo dự định của chị Hương, mỗi buổi tập thể dục cần đốt cháy được 335 calo từ việc đốt 11 calo mỗi phút bằng thể dục nhịp điệu và 4 calo mỗi phút bằng giãn cơ nên ta có phương trình

$$11x + 4y = 335.$$

Vậy ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 40 \\ 11x + 4y = 335. \end{cases}$

b) Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có $x = 40 - y$. Thế vào phương trình thứ hai ta được $11(40 - y) + 4y = 335$ hay $y = 15$. Thay $y = 15$ vào phương trình thứ nhất ta được $x = 25$. Ta có $x = 25,\ y = 15$ thoả mãn điều kiện của ẩn.

Vậy chị Hương nên tập thể dục nhịp điệu trong 25 phút và giãn cơ trong 15 phút để đạt được mục tiêu của mình.

1.21. Đổi: 30 triệu đồng = 30 000 nghìn đồng.

Gọi x là số lượng đĩa CD mà anh Hưng và ban nhạc của anh cần bán để hoà vốn. Khi đó, điều kiện của ẩn là $x \in \mathbb{N}^*$.

Gọi y (nghìn đồng) là số tiền khi anh Hưng và ban nhạc hoà vốn. Khi đó, điều kiện của ẩn là $y > 0$.

Số tiền anh Hưng và ban nhạc bỏ ra để thu âm và sản xuất x đĩa là $30000 + 8x$ (nghìn đồng). Do đó, ta có phương trình $y = 30\,000 + 8x$.

Mặt khác, doanh thu của ban nhạc khi bán hết x đĩa là $20x$ (nghìn đồng). Do đó, ta có phương trình $y = 20x$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} y = 30\,000 + 8x \\ y = 20x. \end{cases}$

Thế hệ thức thứ hai vào phương trình thứ nhất trong hệ ta được

$$20x = 30\,000 + 8x \text{ hay } x = 2\,500.$$

Do đó, $y = 50\,000$. Ta có $x = 2\,500$, $y = 50\,000$ thoả mãn điều kiện của ẩn.

Vậy ban nhạc đó cần bán 2 500 đĩa CD để hoà vốn và doanh thu khi hoà vốn là 50 000 nghìn đồng, tức là 50 triệu đồng.

1.22. Gọi giá mỗi cuốn sách mới và cũ lần lượt là x, y (đồng). Khi đó, điều kiện của ẩn là $x > 0$, $y > 0$.

Theo đề bài, Mai chi 112 500 đồng để mua 3 cuốn sách mới và 4 cuốn sách cũ nên ta có phương trình

$$3x + 4y = 112\,500.$$

Linh chi 157 500 đồng để mua 10 cuốn sách cũ và 3 cuốn sách mới nên ta có phương trình

$$3x + 10y = 157\,500.$$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 3x + 4y = 112\,500 \\ 3x + 10y = 157\,500. \end{cases}$

Trừ từng vế hai phương trình của hệ ta được $6y = 45\,000$ hay $y = 7\,500$. Thay $y = 7\,500$ vào phương trình thứ nhất ta được $x = 27\,500$. Ta có $x = 27\,500$, $y = 7\,500$ thoả mãn điều kiện của ẩn.

Vậy giá mỗi cuốn sách mới và cũ lần lượt là 27 500 đồng và 7 500 đồng.

1.23. Gọi v là vận tốc riêng của máy bay (tính bằng dặm/giờ) và w là vận tốc gió (tính bằng dặm/giờ). Khi đó, để vận tốc máy bay thắng vận tốc gió thì điều kiện của ẩn là $v > w > 0$.

Khi máy bay đi từ Atlanta đến Paris (đi về phía đông), thời gian di chuyển là 8 giờ và khoảng cách là 4 000 dặm, nên ta có phương trình

$$v+w=\frac{4\,000}{8}=500.$$

Khi máy bay đi từ Paris về Atlanta (đi về phía tây), thời gian di chuyển là 10 giờ và khoảng cách là 4 000 dặm, nên ta có phương trình

$$v-w=\frac{4\,000}{10}=400.$$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} v+w=500 \\ v-w=400. \end{cases}$

Cộng từng vế hai phương trình của hệ ta được $2v=900$ hay $v=450$.

Thay giá trị này vào phương trình thứ nhất của hệ ta được $w=50$.

Ta có $v=450, w=50$ thoả mãn điều kiện của ẩn.

Vậy vận tốc riêng của máy bay là 450 dặm/giờ và vận tốc gió là 50 dặm/giờ.

1.24. Gọi số tuần sau tuần đầu tiên cho đến tuần mà hai người có độ dài quãng đường chạy bằng nhau (tính cả tuần mà hai người chạy với quãng đường bằng nhau) là n và quãng đường ở tuần thứ $n+1$ là d. Khi đó, điều kiện của ẩn là $n, d>0; n, d\in\mathbb{N}$.

Từ kế hoạch của Hùng thì ta có phương trình là $d=4+n$.

Mặt khác, từ kế hoạch của Huy ta có phương trình $d=1+2n$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} d=4+n \\ d=1+2n. \end{cases}$

Từ đây, ta có $4+n=1+2n$ hay $n=3$. Thay $n=3$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được $d=7$. Ta có $n=3, d=7$ thoả mãn điều kiện của ẩn.

Vậy ở tuần thứ 4, hai người có tổng quãng đường chạy bằng nhau và bằng 7 km.

ÔN TẬP CHƯƠNG I

A. Câu hỏi (Trắc nghiệm)

1. C. **2.** D. **3.** B. **4.** C.

5. C. **6.** B. **7.** D. **8.** A.

B. Bài tập

1.25. Thay hai nghiệm là $(3; -1)$ và $(-4; -2)$ vào phương trình đã cho ta được hệ phương trình: $\begin{cases} 3a - b = 1 \\ -4a - 2b = 1. \end{cases}$

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có $b = 3a - 1$. Thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được $-4a - 2(3a - 1) = 1$ hay $a = 0,1$. Dẫn đến, $b = 0,3 - 1 = -0,7$.

Vậy $a = 0,1$ và $b = -0,7$.

1.26. a) Nhân hai vế phương trình thứ nhất với 5 và nhân hai vế phương trình thứ hai với 4 ta được hệ

$$\begin{cases} 2x + 1,5y = 5,5 \\ -2x + 0,8y = 6. \end{cases}$$

Cộng từng vế hai phương trình của hệ ta được: $2,3y = 11,5$ hay $y = 5$. Dẫn đến $x = \dfrac{1,1 - 5.0,3}{0,4} = -1$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(-1; 5)$.

b) Nhân 12 vào hai vế phương trình thứ nhất của hệ đã cho ta được hệ

$$\begin{cases} 4x - 6y = 12 \\ -4x + 6y = 3. \end{cases}$$

Cộng từng vế hai phương trình của hệ phương trình mới ta được $0x + 0y = 15$. Do không có giá trị nào của x và y thoả mãn hệ thức $0x + 0y = 15$ nên hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

c) Nhân hai vế của phương trình thứ nhất với 10 và hai vế của phương trình thứ hai với 6 ta được hệ: $\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ -2x + 3y = -6. \end{cases}$

Cộng từng vế hai phương trình của hệ mới ta được: $0x + 0y = 0$. Hệ thức này thoả mãn với mọi giá trị tuỳ ý của x và y. Với mỗi giá trị x tuỳ ý, giá trị của y được xác định bởi hệ thức $0,2x - 0,3y = 0,6$ hay $y = \dfrac{2}{3}x - 2$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $\left(x; \dfrac{2}{3}x - 2\right)$ với $x \in \mathbb{R}$ tuỳ ý.

1.27. a) Với $m=1$ ta có hệ $\begin{cases} x+9y=4 \\ x+y=2. \end{cases}$

Trừ từng vế hai phương trình của hệ ta được: $8y=2$ hay $y=\frac{1}{4}$. Thay $y=\frac{1}{4}$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được $x=2-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$.

Vậy với $m=1$ hệ đã cho có nghiệm là $\left(\frac{7}{4};\frac{1}{4}\right)$.

b) Với $m=-3$ ta có hệ $\begin{cases} -3x+9y=0 \\ x-3y=2. \end{cases}$

Nhân từng vế phương trình thứ nhất với $\frac{1}{3}$ ta được hệ $\begin{cases} -x+3y=0 \\ x-3y=2. \end{cases}$

Cộng từng vế hai phương trình của hệ mới ta được $0x+0y=2$. Do không có giá trị nào của x và y thoả mãn hệ thức $0x+0y=2$ nên với $m=-3$, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

c) Với $m=3$ ta có hệ $\begin{cases} 3x+9y=6 \\ x+3y=2. \end{cases}$

Nhân từng vế của phương trình thứ hai với 3 ta được hệ $\begin{cases} 3x+9y=6 \\ 3x+9y=6. \end{cases}$

Trừ từng vế hai phương trình của hệ mới ta được $0x+0y=0$. Hệ thức này thoả mãn với mọi giá trị tuỳ ý của x và y. Với mỗi giá trị y tuỳ ý, giá trị của x được xác định bởi hệ thức $x+3y=2$ hay $x=2-3y$.

Vậy với $m=3$, hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(2-3y;\ y)$ với $y\in\mathbb{R}$ tuỳ ý.

1.28. Ta tìm giao điểm của đường thẳng d_1 và d_2 bằng cách giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=3. \end{cases}$$

Cộng từng vế hai phương trình của hệ ta được $2x=4$ hay $x=2$. Thay $x=2$ vào phương trình thứ hai trong hệ ta được $y=1$. Vậy giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 là $(2;1)$.

Ba đường thẳng d_1, d_2 và d_3 đồng quy khi d_3 đi qua điểm $(2; 1)$. Do đó, điểm $(2; 1)$ thoả mãn $2 \cdot 2 + a \cdot 1 = 1$ hay $a = -3$.

Vậy với $a = -3$ thì ba đường thẳng d_1, d_2 và d_3 đồng quy.

1.29. Ta có điều kiện của ẩn x là $x \in \mathbb{N}^*$.

Hoà vốn tức là $C = R$ nên ta có hệ phương trình $\begin{cases} R = 15x + 12\,000 \\ R = 18x - 6\,000. \end{cases}$

Thế phương trình thứ nhất vào phương trình thứ hai ta được $15x + 12\,000 = 18x - 6\,000$ hay $x = 6\,000$. Ta có $x = 6\,000$ thoả mãn điều kiện của ẩn.

Vậy để hoà vốn công ty cần sản xuất và bán được 6 000 đơn vị sản phẩm.

Khi đó doanh thu của công ty là

$$R = 18 \cdot 6\,000 - 6\,000 = 102\,000 \text{ (đô la)}.$$

1.30. Gọi số vé loại I, II bán được lần lượt là x, y (vé). Khi đó, điều kiện của ẩn là $x, y \in \mathbb{N}$.

Theo đề bài buổi biểu diễn văn nghệ bán được 1 500 vé nên ta có phương trình:

$$x + y = 1\,500.$$

Mặt khác, mỗi vé loại I giá 250 nghìn đồng và loại II giá 150 nghìn đồng, với tổng số tiền bán là 285 triệu đồng hay 285 000 nghìn đồng, nên ta có phương trình

$$250x + 150y = 285\,000.$$

Do đó, ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 1500 \\ 250x + 150y = 285\,000. \end{cases}$

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có $x = 1500 - y$. Thế vào phương trình thứ hai ta được $250(1500 - y) + 150y = 285000$ hay $375000 - 100y = 285000$ dẫn đến $y = 900$. Do đó, $x = 1500 - 900 = 600$. Ta có $x = 600$, $y = 900$ thoả mãn điều kiện của ẩn.

Vậy buổi biểu diễn đó bán được 600 vé loại I và 900 vé loại II.

1.31. Gọi số lượng khẩu phần súp cà chua là x (phần) và số lượng lát bánh mì nguyên hạt là y (lát). Khi đó, điều kiện của ẩn là $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Theo đề bài, lượng calo cần có 230 calo nên ta có phương trình

$$100x + 70y = 230.$$

Theo đề bài lượng carbohydrate cần là 42 gam nên ta có phương trình

$$18x + 13y = 42.$$

Do đó, ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 100x + 70y = 230 \\ 18x + 13y = 42. \end{cases}$

Từ phương trình thứ hai trong hệ ta có $x = \frac{7}{3} - \frac{13}{18}y$. Thế vào phương trình thứ nhất ta được $100\left(\frac{7}{3} - \frac{13}{18}y\right) + 70y = 230$ hay $y = \frac{3}{2}$. Thay $y = \frac{3}{2}$ vào hệ thức $x = \frac{7}{3} - \frac{13}{18}y$ ta được $x = \frac{5}{4}$. Ta có $x = \frac{5}{4}, y = \frac{3}{2}$ thoả mãn điều kiện của ẩn.

Vậy cần $\frac{5}{4}$ khẩu phần súp cà chua và $\frac{3}{2}$ lát bánh mì nguyên hạt để có 230 calo và 42 gam carbohydrate.

1.32. Gọi quãng đường người đó đi xe ô tô trong thành phố và trên đường cao tốc lần lượt là x, y (km). Khi đó, điều kiện của ẩn là $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Theo đề bài người đó đi cả quãng đường ở thành phố và cao tốc tiêu thụ hết 8,415 lít xăng nên ta có phương trình:

$$\frac{8,1}{100}x + \frac{4,8}{100}y = 8,415 \text{ hay } 0,081x + 0,048y = 8,415.$$

Cả quãng đường người đó đi cao tốc và trong thành phố là 165 km nên ta có phương trình $x + y = 165$.

Do đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 165 \\ 0,081x + 0,048y = 8,415. \end{cases}$

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có $x = 165 - y$. Thế vào phương trình thứ hai ta được $0,081(165 - y) + 0,048y = 8,415$ hay $y = 150$.

Thay $y = 150$ vào hệ thức $x = 165 - y$ ta được $x = 15$. Ta có $x = 15$, $y = 150$ thoả mãn điều kiện của ẩn.

Vậy quãng đường người đó lái xe trong thành phố là 15 km và quãng đường người đó lái xe trên cao tốc là 150 km.

CHƯƠNG II. PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

BÀI 4. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

2.1. *ĐS.* a) Phương trình có hai nghiệm $x=-2, x=1$.

b) Phương trình có hai nghiệm $x=2, x=-\frac{2}{7}$.

2.2. *HD.* a) Biến đổi về $x^2-1=0$. Phương trình có hai nghiệm $x=1, x=-1$.

b) Biến đổi về $(3x+1)(5-2x)=0$. Suy ra phương trình có hai nghiệm $x=\frac{5}{2}, x=-\frac{1}{3}$.

2.3. *HD.* Tương tự Ví dụ 3 trong Bài 4.

a) Biến đổi về dạng $(x+1)(x+6)=0$. Phương trình có hai nghiệm

$$x=-1, x=-6.$$

b) Biến đổi về dạng $(2x-1)(x-1)=0$. Phương trình có hai nghiệm

$$x=1, x=\frac{1}{2}.$$

2.4. *ĐS.* a) Nghiệm của phương trình là $x=-\frac{4}{19}$.

b) Nghiệm của phương trình là $x=\frac{5}{12}$.

2.5. *ĐS.* a) Nghiệm của phương trình là $x=3$.

b) Phương trình có nghiệm $x=-\frac{3}{2}$.

2.6. Thời gian t(giây) $(t>0)$ để vật chạm đất là nghiệm của phương trình

$$4,9t^2=120$$

$$t^2=120:4,9$$

$$t\approx 5 \text{ (giây)}$$

Vậy sau khoảng 5 giây kể từ khi bắt đầu rơi thì vật này chạm mặt đất.

2.7. Gọi x (km/h) là tốc độ cho phép của ô tô trên cao tốc Thành phố Hồ Chí Minh – Trung Lương trong điều kiện bình thường. Khi đó

a) $60 \le x$ và $x \le 100$.

b) $50 \le x$ và $x \le 80$.

2.8. a) Gọi t là tuổi của một người. Để người đó được đi bầu cử đại biểu Quốc hội thì $t \ge 18$.

b) Gọi x (kg) là khối lượng hàng hoá thang máy chở được, khi đó $x \le 700$.

c) Gọi y (đồng) là số tiền bạn mua hàng. Để được giảm giá thì $y \ge 1\,000\,000$.

d) Gọi z là số bóng bạn ném được vào rổ, để được vào đội tuyển bóng rổ thì $z \ge 5$.

2.9. *HD.* a) $-\dfrac{2019}{1010} > -2$ và $-2 > -\dfrac{201}{100}$ nên $-\dfrac{2019}{1010} > -\dfrac{201}{100}$.

b) $\dfrac{2024^2-1}{2024} < \dfrac{2024^2}{2024} = 2024$ và $\dfrac{2025^2+1}{2025} > \dfrac{2025^2}{2025} = 2025$.

Vì $2024 < 2025$ nên $\dfrac{2024^2-1}{2024} < \dfrac{2025^2+1}{2025}$.

2.10. a) Vì $a > b$ nên $15a > 15b$, suy ra $15a + 5a + 5b > 15b + 5a + 5b$.

Do đó $20a + 5b > 20b + 5a$.

b) Vì $a > b$ nên $-3a < -3b$, suy ra $-3a - 3b - 1 < -3b - 3b - 1$.

Do đó $-3(a+b) - 1 < -6b - 1$.

2.11. a) Từ $a > b > 0$ nên $a \cdot a > b \cdot a$ và $a \cdot b > b \cdot b$ hay $a^2 > ab$ và $ab > b^2$.

b) Theo ý a) và tính chất bắc cầu của bất đẳng thức, ta suy ra $a^2 > b^2$. Do đó $a^2 \cdot a > b^2 \cdot a$ và $b^2 \cdot a > b^2 \cdot b$ nên $a^3 > b^3$.

Chú ý. Ta có thể xét $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Vì $a - b > 0$ và $a + b > 0$ nên $(a-b)(a+b) > 0$. Suy ra $a^2 > b^2$.

Tương tự, ta cũng chứng minh được $a^3 - b^3 > 0$.

2.12. Ta có $\dfrac{a^2+b^2}{2} - ab = \dfrac{1}{2}\left(a^2 + b^2 - 2ab\right) = \dfrac{1}{2}(a-b)^2 \ge 0$. Suy ra $\dfrac{a^2+b^2}{2} \ge ab$.

2.13. Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là $n-1$, n và $n+1$. Ta có

$$n^2 - (n+1)(n-1) = n^2 - \left(n^2 - 1\right) = 1 > 0.$$

Suy ra $n^2 > (n+1)(n-1)$.

BÀI 6. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

2.14. *ĐS.* a) $x<\frac{3}{7}$. b) $x\geq-\frac{5}{6}$. c) $x>14$. d) $x\leq-\frac{15}{2}$.

2.15. *ĐS.* a) $x<-\frac{2}{7}$. b) $x\geq-\frac{2}{9}$.

2.16.

a) $3(2x-3)(2x+3)>12x^2+2x$

$3\left(4x^2-9\right)>12x^2+2x$

$12x^2-27>12x^2+2x$

$x<-\frac{27}{2}$.

b) $(2x+1)(5x-3)>10x^2+2x+1$

$(2x+1)\cdot 5x-(2x+1)\cdot 3>10x^2+2x+1$

$10x^2+5x-6x-3>10x^2+2x+1$

$-x-2x>1+3$

$-3x>4$

$x<-\frac{4}{3}$.

2.17. a) Gọi x (kg) là khối lượng mà thang máy có thể chở thêm được. Khi đó, tổng khối lượng thang máy chở là $x+260$. Vì thang máy có thể chở được tối đa là 710 kg nên ta có $x+260\leq 710$.

$x\leq 710-260$

$x\leq 450$.

Vậy thang máy có thể chở thêm được 450 kg.

b) Gọi $y\left(y\in\mathbb{N}\right)$ là số người thang máy có thể chở thêm được. Khi đó

$$60y\leq 450 \text{ hay } y\leq\frac{15}{2}.$$

Vì y là số tự nhiên nên $y\leq 7$. Vậy thang máy chở thêm tối đa được 7 người nữa.

2.18. *HD.* a) Gọi x (giờ) là số giờ David làm trong mùa hè. Ta có $8x\geq 1\,200$.

b) Ít nhất 150 giờ.

2.19. Ta có $x-3\leq 15$ hay $x\leq 18$, $x-3>0$ hay $x>3$.

Vậy giá trị có thể nhận là $3<x\leq 18$.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

A. Câu hỏi (Trắc nghiệm)

1. A **2.** C **3.** C **4.** D **5.** C

B. Bài tập

2.20. *HD.* Phân tích biểu thức vế trái thành nhân tử. Từ đó suy ra phương trình có hai nghiệm $x = 2,\ x = -2$;

b) Biến đổi phương trình $x^2 - 4x = x - 4$ về dạng $(x-1)(x-4) = 0$. Từ đó suy ra phương trình có hai nghiệm $x = 1,\ x = 4$.

2.21. *ĐS.* a) $x = 0, x = 1$; b) $x = -2,5$.

2.22. *ĐS.* a) $x > -\frac{1}{9}$; b) $x > \frac{10}{3}$.

2.23. a) Từ $a < b$, suy ra $a + c < b + c$. Từ $c < d$, suy ra $b + c < b + d$. Do đó

$$a + c < b + d.$$

b) Từ $0 < a$ và $0 < c$ nên $0 < ac$.

Từ $0 < a < b$ và $0 < c$ nên $ac < bc$. (1)

Từ $b < d$ và $0 < c$ nên $bc < dc$. (2)

Kết hợp (1) và (2), theo tính chất bắc cầu, ta được $ac < bd$.

Vậy $0 < ac < bd$.

2.24. Ta có $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab} \geq 0$ vì $(a-b)^2 \geq 0$ và $ab > 0$ (do $a > 0, b > 0$).

Suy ra $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

2.25. Gọi điểm số bài kiểm tra viết của Hà là x. Khi đó điểm số trung bình là $\frac{78 + 83 + 89 + x}{4}$. Để điểm số trung bình đạt được ít nhất là 85, ta phải có

$$\frac{78 + 83 + 89 + x}{4} \geq 85$$

$$250 + x \geq 340$$

$$x \geq 90.$$

Vậy Hà cần đạt ít nhất 90 điểm ở bài thi viết.

2.26. a) Gọi x (giờ) là số giờ Laurent làm trong mùa hè. Số tiền mà Laurent kiếm được là $10,25x$ (€). Để kiếm được ít nhất 1 500 €, ta có bất phương trình

$$10,25x \geq 1\,500.$$

b) Ta có $10,25x \geq 1\,500$

$x \geq 1\,500 : 10,25$

$x \geq 146,34.$

Vậy Laurent cần ít nhất 147 giờ làm việc để kiếm được số tiền trên.

2.27. 30 phút $= \frac{1}{2}$ giờ.

Gọi vận tốc của xe thứ nhất là x (km/h) $(x \geq 10)$. Khi đó vận tốc của xe thứ hai là $x - 10$ (km/h).

Thời gian xe thứ nhất đi từ A đến B là $\frac{150}{x}$ (giờ). Thời gian xe thứ hai đi từ A đến B là $\frac{150}{x-10}$ (giờ).

Ta có $\frac{150}{x-10} - \frac{150}{x} = \frac{1}{2}$ hay $\frac{150x - 150(x-10)}{(x-10)x} = \frac{1}{2}$

$\frac{1\,500}{x^2 - 10x} = \frac{1}{2}$

$x^2 - 10x = 3\,000$

$x^2 - 10x + 25 = 3\,025$

$(x-5)^2 = 3\,025$

$x - 5 = 55$ (do $x \geq 10$ nên $x - 5 > 0$)

$x = 60.$

Vậy vận tốc xe thứ nhất là 60 km/h và vận tốc xe thứ hai là 50 km/h.

CHƯƠNG III. CĂN BẬC HAI VÀ CĂN BẬC BA

BÀI 7. CĂN BẬC HAI VÀ CĂN THỨC BẬC HAI

3.1. a) 9 và –9. b) $\frac{4}{25}$ và $-\frac{4}{25}$. c) 0,11 và –0,11. d) 80 và –80.

3.2. a) Bấm liên tiếp các phím $\sqrt{\blacksquare}$ 1 7 = S⇔D. Màn hình hiện kết quả 4.123105626. Làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba ta được $\sqrt{17} \approx 4,123$.

b) Bấm liên tiếp các phím $\sqrt{\blacksquare}$ 4 0 2 1 = S⇔D. Màn hình hiện kết quả 63.41135545. Làm tròn đến hàng phần trăm ta được $\sqrt{4021} \approx 63,41$.

c) Bấm liên tiếp các phím

(-) 1 1 + √ 1 1 x^2 − 4 X 3 X 2 X ▼ 2 X 3 S⇔D.

Màn hình hiện kết quả -0.191857033. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm để có độ chính xác 0,005 ta được $\dfrac{-11+\sqrt{11^2-4\cdot 3\cdot 2}}{2\cdot 3}\approx -0,19$.

3.3. a) $\left(\sqrt{4,1}\right)^2-\left(-\sqrt{6,1}\right)^2=4,1-6,1=-2$; b) $\left(\sqrt{101}\right)^2-\sqrt{(-99)^2}=101-99=2$;

c) $\sqrt{\left(\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right)^2}-\left(-\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right)-\left(-\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right)=2\sqrt{3}$;

d) $\sqrt{\left(\sqrt{10}+3\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{10}-3\right)^2}=\left(\sqrt{10}+3\right)-\left(\sqrt{10}-3\right)=6$.

3.4. a) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2=3-2=1$.

b) $\sqrt{2-2\sqrt{2}+1}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot 1+1^2}=\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}=\sqrt{2}-1$ (vì $2>1$ suy ra $\sqrt{2}>\sqrt{1}$ hay $\sqrt{2}>1$).

3.5. a) Với $x^2+5x+6=0$, ta có $a=1$, $b=5$, $c=6$ và

$$\sqrt{b^2-4ac}=\sqrt{5^2-4\cdot 1\cdot 6}=\sqrt{1}=1.$$

b) Với $4x^2-5x-6=0$, ta có $a=4, b=-5$, $c=-6$ và

$$\sqrt{b^2-4ac}=\sqrt{(-5)^2-4\cdot 4\cdot(-6)}=\sqrt{121}=11.$$

c) Với $-3x^2-2x+33=0$, ta có $a=-3$, $b=-2$, $c=33$ và

$$\sqrt{b^2-4ac}=\sqrt{(-2)^2-4\cdot(-3)\cdot 33}=\sqrt{400}=20.$$

3.6. a) $\sqrt{49x^4}-3x^2=\sqrt{\left(7x^2\right)^2}-3x^2=7x^2-3x^2=4x^2$.

b) $\sqrt{a^6(a-b)^2}:(a-b)=\sqrt{\left[a^3(a-b)\right]^2}:(a-b)=\left|a^3(a-b)\right|:(a-b)$

$=a^3(a-b):(a-b)=a^2$ vì $a<0, a-b<0$ do giả thiết $a<b<0$.

3.7. Ta có $\sqrt{25\left(4x^2-4x+1\right)^2}=\sqrt{5^2(2x-1)^2}=5|2x-1|$.

Với $x=\sqrt{3}$ thì $2x-1=2\sqrt{3}-1>0$ nên biểu thức đã cho có giá trị bằng $5\left(2\sqrt{3}-1\right)$.

BÀI 8. KHAI CĂN BẬC HAI VỚI PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA

3.8. a) $\sqrt{5}\sqrt{11}=\sqrt{5\cdot 11}=\sqrt{55}<\sqrt{56}$.

b) $\dfrac{\sqrt{141}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{141}{3}}=\sqrt{47}<\sqrt{49}=7$ nên $\dfrac{\sqrt{141}}{\sqrt{3}}<7$.

3.9. a) $\sqrt{1\dfrac{2}{3}}:\sqrt{\dfrac{1}{15}}=\sqrt{\dfrac{5}{3}}:\sqrt{\dfrac{1}{3\cdot 5}}=\sqrt{\dfrac{5}{3}:\dfrac{1}{3\cdot 5}}=\sqrt{\dfrac{5}{3}\cdot(3\cdot 5)}=5$.

b) $\sqrt{4,9}\sqrt{1\,000}=\sqrt{4,9\cdot 1\,000}=\sqrt{49\cdot 100}=7\cdot 10=70$.

3.10. a) $\sqrt{8+\sqrt{15}}\sqrt{8-\sqrt{15}}=\sqrt{\left(8+\sqrt{15}\right)\left(8-\sqrt{15}\right)}=\sqrt{8^2-\left(\sqrt{15}\right)^2}=\sqrt{64-15}=\sqrt{49}=7$.

b) $\left(\sqrt{6-\sqrt{11}}+\sqrt{6+\sqrt{11}}\right)^2=\left(\sqrt{6-\sqrt{11}}\right)^2+2\sqrt{6-\sqrt{11}}\sqrt{6+\sqrt{11}}+\left(\sqrt{6+\sqrt{11}}\right)^2$

$=6-\sqrt{11}+2\sqrt{6^2-\left(\sqrt{11}\right)^2}+6+\sqrt{11}=12+2\sqrt{36-11}=12+2\cdot 5=22$.

3.11. $P=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\sqrt{4+\sqrt{8}}=\sqrt{\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\left(4+\sqrt{8}\right)}$

$=\sqrt{\left[4-\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2\right]\left(4+\sqrt{4\cdot 2}\right)}=\sqrt{\left[4-\left(2+\sqrt{2}\right)\right]\left(4+2\sqrt{2}\right)}$

$=\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)2\left(2+\sqrt{2}\right)}=\sqrt{\left(2^2-\left(\sqrt{2}\right)^2\right)2}=\sqrt{2\cdot 2}=2$.

3.12. $P=\dfrac{3\sqrt{10}+\sqrt{10\cdot 2}-3\sqrt{6}-\sqrt{6\cdot 2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{10}+\sqrt{10}\sqrt{2}-3\sqrt{6}-\sqrt{6}\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

$=\dfrac{\left(3+\sqrt{2}\right)\sqrt{10}-\sqrt{6}\left(3+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\dfrac{\left(3+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

$=\left(3+\sqrt{2}\right)\sqrt{2}=2+3\sqrt{2}$.

3.13. Ta có $\sqrt{\sqrt{6+\sqrt{20}}}=\sqrt{\sqrt{5+1+\sqrt{4\cdot 5}}}=\sqrt{\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2+1^2+2\sqrt{5}}}=\sqrt{\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}}$

$=\sqrt{\sqrt{5}+1}<\sqrt{\sqrt{6}+1}$.

3.14. Từ giả thiết suy ra $a+\sqrt{1-a^2}=\sqrt{1-b^2}+b$. Bình phương hai vế và rút gọn:

$a^2+\left(1-a^2\right)+2a\sqrt{1-a^2}=b^2+\left(1-b^2\right)+2b\sqrt{1-b^2}$

$a\sqrt{1-a^2}=b\sqrt{1-b^2}$.

Lại bình phương hai vế rồi rút gọn ta được

$$a^2\left(1-a^2\right)=b^2\left(1-b^2\right)$$
$$a^2-a^4=b^2-b^4$$
$$a^4-b^4-a^2+b^2=0$$
$$\left(a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2-1\right)=0.$$

Suy ra $a^2+b^2=1$ (vì $a^2-b^2\neq 0$ do giả thiết a,b là hai số khác nhau).

BÀI 9. BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN VÀ RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI

3.15. Có $\sqrt{20}+2\sqrt{45}-3\sqrt{80}=\sqrt{4\cdot 5}+2\sqrt{9\cdot 5}-3\sqrt{16\cdot 5}=\left(2+2\cdot 3-3\cdot 4\right)\sqrt{5}=-4\sqrt{5}.$

Do đó $P=\left(-4\sqrt{5}\right)^2=16\cdot 5=80.$

3.16. Đưa thừa số vào trong dấu căn bậc hai, ta được

$9\sqrt{2}=\sqrt{9^2\cdot 2}=\sqrt{162};$ $\quad 8\sqrt{3}=\sqrt{8^2\cdot 3}=\sqrt{192};$

$5\sqrt{6}=\sqrt{5^2\cdot 6}=\sqrt{150};$ $\quad 4\sqrt{7}=\sqrt{4^2\cdot 7}=\sqrt{112}.$

Vì $112<150<162<192$ nên $4\sqrt{7}<5\sqrt{6}<9\sqrt{2}<8\sqrt{3}$.

3.17. Rút gọn biểu thức trong dấu ngoặc, ta được

$$\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{7}}+\sqrt{175}-2\sqrt{2}=\frac{\sqrt{8}-\sqrt{7}}{\left(\sqrt{8}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{8}-\sqrt{7}\right)}+\sqrt{5^2\cdot 7}-2\sqrt{2}$$
$$=\frac{\sqrt{8}-\sqrt{7}}{1}+5\sqrt{7}-\sqrt{8}=4\sqrt{7}.$$

Từ đó $\left(\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{7}}+\sqrt{175}-2\sqrt{2}\right)^2=\left(4\sqrt{7}\right)^2=4^2\cdot 7=112.$

3.18. Chú ý rằng $17-12\sqrt{2}=9+8-2\cdot 3\cdot 2\sqrt{2}=\left(3-2\sqrt{2}\right)^2$, suy ra

$$\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{\left(3-2\sqrt{2}\right)^2}}=\sqrt{\frac{1}{3-2\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)}}$$
$$=\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{3^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2}}=\sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}=1+\sqrt{2}.$$

Tương tự, $\sqrt{\dfrac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}}=-1+\sqrt{2}.$

Do đó $\sqrt{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}}-\sqrt{\dfrac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}}=\left(1+\sqrt{2}\right)-\left(-1+\sqrt{2}\right)=2.$

3.19. Thực hiện phép tính trong mỗi dấu ngoặc, ta có

- $\dfrac{\sqrt{5}+1}{1+\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}-1}{1+\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\dfrac{\left(\sqrt{5}+1\right)\left[\left(1+\sqrt{3}\right)-\sqrt{5}\right]+\left(\sqrt{5}-1\right)\left[\left(1+\sqrt{3}\right)+\sqrt{5}\right]}{\left[\left(1+\sqrt{3}\right)+\sqrt{5}\right]\left[\left(1+\sqrt{3}\right)-\sqrt{5}\right]}$

$$=\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)\left(1+\sqrt{3}\right)-\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}-1\right)\left(1+\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{5}}{\left(1+\sqrt{3}\right)^2-5}$$

$$=\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)\left[\left(\sqrt{5}+1\right)+\left(\sqrt{5}-1\right)\right]+\left[-\left(\sqrt{5}+1\right)+\left(\sqrt{5}-1\right)\right]\sqrt{5}}{\left(4+2\sqrt{3}\right)-5}$$

$$=\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)2\sqrt{5}-2\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-1}=\frac{2\sqrt{15}}{2\sqrt{3}-1}.$$

- $\sqrt{3}-\dfrac{4}{\sqrt{3}}+2=\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^2-4+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\dfrac{-1+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$

Do đó $P=\dfrac{2\sqrt{15}}{2\sqrt{3}-1}\cdot\dfrac{-1+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{0,2}=2\sqrt{5}\cdot\sqrt{0,2}=2\sqrt{5\cdot 0,2}=2\sqrt{1}=2.$

3.20. a) $\dfrac{3+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}=\dfrac{\left(3+\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{2}+1\right)}{\left(2\sqrt{2}-1\right)\left(2\sqrt{2}+1\right)}=\dfrac{\left(3+\sqrt{2}\right)2\sqrt{2}+\left(3+\sqrt{2}\right)}{\left(2\sqrt{2}\right)^2-1}$

$$=\frac{6\sqrt{2}+4+3+\sqrt{2}}{7}=\frac{7\left(\sqrt{2}+1\right)}{7}=\sqrt{2}+1.$$

b) Theo a, có $x=\dfrac{3+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$ nên $x^2=\left(\sqrt{2}+1\right)^2=3+2\sqrt{2}$, do đó

$x^2-3=2\sqrt{2}$ và $P=x\left(x^4-6x^2+1\right)=x\left[\left(x^2-3\right)^2-8\right]=x\left[\left(2\sqrt{2}\right)^2-8\right]=0.$

BÀI 10. CĂN BẬC BA VÀ CĂN THỨC BẬC BA

3.21. a) $\sqrt[3]{-27}+2\sqrt[3]{\frac{1}{8}}+5\sqrt[3]{-0,008}=\sqrt[3]{(-3)^3}+2\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^3}+5\sqrt[3]{(-0,2)^3}$

$=-3+2\cdot\frac{1}{2}+5\cdot(-0,2)=-3.$

b) $\sqrt[3]{0,001}-3\sqrt[3]{\frac{8}{125}}+2\sqrt[3]{-64}=\sqrt[3]{0,1^3}-3\sqrt[3]{\left(\frac{2}{5}\right)^3}+2\sqrt[3]{(-4)^3}$

$=0,1-3\cdot\frac{2}{5}+2\cdot(-4)=-\frac{91}{10}.$

3.22. a) $\left(\sqrt[3]{64}-\sqrt[3]{27}\right)\cdot\sqrt[3]{\frac{125}{8}}=\left(\sqrt[3]{4^3}-\sqrt[3]{3^3}\right)\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{5}{2}\right)^3}=(4-3)\cdot\frac{5}{2}=\frac{5}{2}.$

b) $\frac{5\sqrt[3]{-8}-10\sqrt[3]{0,008}+3\sqrt[3]{343}}{\sqrt[3]{0,064}+\sqrt[3]{0,125}}=\frac{5\sqrt[3]{(-2)^3}-10\sqrt[3]{0,2^3}+3\sqrt[3]{7^3}}{\sqrt[3]{0,4^3}+\sqrt[3]{0,5^3}}$

$=\frac{5\cdot(-2)-10\cdot0,2+3\cdot7}{0,4+0,5}=\frac{9}{0,9}=10.$

3.23. a) $\sqrt[3]{2x-1}=1$ có nghĩa là $2x-1=1^3$ hay $2x=2$ do đó $x=1$.

b) Vì $5x-\sqrt[3]{64x^3}=5x-\sqrt[3]{(4x)^3}=5x-4x=x$ nên ta được $x=25$.

3.24. a) Vì $5=\sqrt[3]{5^3}=\sqrt[3]{125}>\sqrt[3]{123}$ nên $5>\sqrt[3]{123}$.

b) $\sqrt[3]{0,009}>\sqrt[3]{0,008}=\sqrt[3]{0,2^3}=0,2$ nên $\sqrt[3]{0,009}>0,2$.

3.25. Vì 1 lít nước = 1 dm^3 nên thùng tôn cần làm có thể tích 215 dm^3, do đó chiều dài cạnh thùng bằng $x=\sqrt[3]{215}$ (dm). Diện tích tôn cần dùng để làm thùng không nắp là $S=5\left(\sqrt[3]{215}\right)^2$ (dm^2).

Sử dụng MTCT tính giá trị biểu thức này và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai ta được: $S\approx179,44$ (dm^2).

3.26. a) Thay $x=5$ vào biểu thức đã cho ta được $P=2\sqrt[3]{5^2-1}=2\sqrt[3]{24}$. Với MTCT thích hợp bấm liên tiếp các phím 2 SHIFT $\sqrt{\blacksquare}$ 2 4 =, màn hình hiện kết quả 5.768998281. Làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba ta được giá trị cần tính là 5,769.

b) Giá trị của biểu thức đã cho tại $x = 0,5$ là $P = \sqrt[3]{2 \cdot 0,5 - 1} - \sqrt[3]{0,5 + 1} = -\sqrt[3]{1,5}$.

Bấm các phím [(-)] [SHIFT] [$\sqrt{\blacksquare}$] [1] [.] [5] [=], màn hình hiện kết quả –1.44714243. Làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba ta được giá trị cần tính là –1,447.

3.27. Đổi đơn vị đo thời gian:

1 giờ = 3 600 giây; 1 ngày = 24 . 3 600 = 8,64 . 10^4 giây;

365 ngày = 365 . 8,64 . 10^4 = 3153,6 . 10^4 giây.

Cần tính giá trị của biểu thức $d = \sqrt[3]{\dfrac{10^{19} T^2}{2,97}}$ tại $T = 3153,6 \cdot 10^4$. Giá trị này bằng $\sqrt[3]{\dfrac{10^{19} \cdot \left(3153,6 \,.\, 10^4\right)^2}{2,97}}$ (mét).

Đổi về đơn vị triệu kilômét cần chia giá trị trên cho $10^6 \cdot 10^3 = 10^9$. Vì vậy cần sử dụng MTCT tính giá trị sau rồi làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất:

$$\sqrt[3]{\dfrac{10^{19} \cdot \left(3153,6 \,.\, 10^4\right)^2}{2,97}} : 10^9.$$

Sử dụng MTCT thích hợp bấm liên tiếp các phím:

[SHIFT] [$\sqrt{\blacksquare}$] [$\blacksquare\blacksquare$] [SHIFT] [log] [1] [9] [▶] [×] [(] [3] [1] [5] [3] [.] [6] [×] [SHIFT] [log] [4] [▶] [)] [x^2] [▼] [2] [.] [9] [7] [▶] [▶] [÷] [SHIFT] [log] [9] [=]

Màn hình hiện kết quả 149.6071173. Làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất ta kết luận:

Khoảng cách trung bình giữa Trái Đất và Mặt Trời xấp xỉ 149,6 triệu kilômét.

Chú ý

Tổ hợp phím	[SHIFT] [$\sqrt{\blacksquare}$]	[SHIFT] [log]	[▶], [◀], [▲], [▼]	[$\frac{\blacksquare}{\blacksquare}$]
Chức năng	($\sqrt[3]{\blacksquare}$)	($10^{\blacksquare}$)	Di chuyển con trỏ sang phải, trái, lên, xuống	phân số

ÔN TẬP CHƯƠNG III

A. Câu hỏi (Trắc nghiệm)

1. D. **2.** B. **3.** C. **4.** D. **5.** A.

B. Bài tập

3.28. a) $\sqrt{12-\sqrt{23}}\cdot\sqrt{12+\sqrt{23}}=\sqrt{\left(12-\sqrt{23}\right)\left(12+\sqrt{23}\right)}.$

$=\sqrt{12^2-\left(\sqrt{23}\right)^2}=\sqrt{144-23}=\sqrt{121}=11.$

b) $\left(\sqrt{9-\sqrt{17}}+\sqrt{9+\sqrt{17}}\right)^2=\left(\sqrt{9-\sqrt{17}}\right)^2+2\sqrt{9-\sqrt{17}}\cdot\sqrt{9+\sqrt{17}}+\left(\sqrt{9+\sqrt{17}}\right)^2$

$=9-\sqrt{17}+2\sqrt{\left(9-\sqrt{17}\right)\left(9+\sqrt{17}\right)}+9+\sqrt{17}$

$=18+2\sqrt{9^2-17}=18+2\cdot\sqrt{64}=34.$

3.29. Ta có $\sqrt{\sqrt{89+24\sqrt{5}}}=\sqrt{\sqrt{\left(3+4\sqrt{5}\right)^2}}=\sqrt{3+4\sqrt{5}}=\sqrt{3+\sqrt{80}}<\sqrt{3+9}$

$=\sqrt{1+\sqrt{121}}<\sqrt{1+\sqrt{122}}.$

Vậy $\sqrt{\sqrt{89+24\sqrt{5}}}<\sqrt{1+\sqrt{122}}.$

3.30. a) Ta có

- $\sqrt{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}=\sqrt{3^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{9-5}=\sqrt{4}=2.$
- $\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2}$

$=\sqrt{\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2+2\sqrt{3+\sqrt{5}}\sqrt{3-\sqrt{5}}+\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2}$

$=\sqrt{3+\sqrt{5}+2\cdot2+3-\sqrt{5}}=\sqrt{10}.$

b) Đặt $x_1=\sqrt{3+\sqrt{5}}$, $x_2=\sqrt{3-\sqrt{5}}$. Theo a, ta có: $x_1x_2=2$, $x_1+x_2=\sqrt{10}$.

Do đó $A=x_1^3+x_2^3=\left(x_1+x_2\right)^3-3x_1x_2\left(x_1+x_2\right)$

$=\left(\sqrt{10}\right)^3-3\cdot2\cdot\sqrt{10}=10\sqrt{10}-6\sqrt{10}=4\sqrt{10};$

$B=x_1^5+x_2^5=\left(x_1^2+x_2^2\right)\left(x_1^3+x_2^3\right)-x_1^2x_2^3-x_2^2x_1^3$

$=\left[\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right]A-\left(x_1x_2\right)^2\left(x_2+x_1\right)$

$=\left[\left(\sqrt{10}\right)^2-2\cdot2\right]\cdot4\sqrt{10}-(2)^2\cdot\sqrt{10}=20\sqrt{10}.$

3.31. Từ giả thiết suy ra $1-x^2=y^2$; $1-y^2=x^2$.

Do đó $A=x-y+\sqrt{y^2}-\sqrt{x^2}=x-y+y-x=0$ (do $x>0$, $y>0$).

3.32. a) Ta có $\left(2-\sqrt{3}\right)^2=2^2-2\cdot2\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2=4-4\sqrt{3}+3=7-4\sqrt{3}$;

$\left(2\sqrt{3}-3\right)^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2-2\cdot2\sqrt{3}\cdot3+3^2=21-12\sqrt{3}$.

b) Theo a, ta có $\sqrt{21-12\sqrt{3}}=\sqrt{\left(2\sqrt{3}-3\right)^2}=\left|2\sqrt{3}-3\right|=2\sqrt{3}-3$

(do $2\sqrt{3}-3=\sqrt{12}-\sqrt{9}>0$). Do đó

$A=\sqrt{4-2\sqrt{3}-\sqrt{21-12\sqrt{3}}}=\sqrt{4-2\sqrt{3}-\left(2\sqrt{3}-3\right)}=\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

Lại theo a, có $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=2-\sqrt{3}$ (do $2-\sqrt{3}=\sqrt{4}-\sqrt{3}>0$)

nên $A=\sqrt{7-4\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$.

$B=\sqrt{2+\sqrt{3}+\sqrt{4-2\sqrt{3}-\sqrt{21-12\sqrt{3}}}}=\sqrt{2+\sqrt{3}+A}$

$=\sqrt{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}=\sqrt{4}=2$.

CHƯƠNG IV. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

BÀI 11. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

4.1. a) Theo định lí Pythagore, ta có $BC^2=AB^2+AC^2=3^2+4^2=25$ nên $BC=5$.

Từ đó $\sin B=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{4}{5}$, $\cos B=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{3}{5}$.

b) Hai tam giác vuông MNP và ABC đồng dạng vì có hai cặp cạnh góc vuông tỉ lệ $\dfrac{MN}{MP}=\dfrac{AB}{AC}$. Từ đó $\sin N=\sin B=\dfrac{4}{5}$, $\cos N=\cos B=\dfrac{3}{5}$.

4.2. a) Hai góc $45^\circ-\alpha$ và $45^\circ+\alpha$ là hai góc nhọn phụ nhau do

$$(45^\circ-\alpha)+(45^\circ+\alpha)=90^\circ.$$

Do đó $\sin(45^\circ-\alpha)=\cos(45^\circ+\alpha)$, $\cos(45^\circ-\alpha)=\sin(45^\circ+\alpha)$.

b) Các cặp góc 25° và 65°, 35° và 55°, 45° và 45° là những cặp góc phụ nhau nên $\sin25^\circ-\cos65^\circ=0$, $\sin35^\circ-\cos55^\circ=0$, $\sin45^\circ-\cos45^\circ=0$.

Vậy tổng đang xét bằng 0.

4.3. $\sin 10^\circ \approx 0{,}174$; $\sin 20^\circ \approx 0{,}342$; $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$; $\sin 40^\circ \approx 0{,}643$.

4.4. a) $\sin\alpha = \frac{1}{4}$ thì $\alpha \approx 14^\circ$, $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ thì $\alpha \approx 19^\circ$,

$\sin\alpha = \frac{1}{2}$ thì $\alpha = 30^\circ$, $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ thì $\alpha \approx 42^\circ$.

b) Bạn đọc tự làm.

4.5. Do hai góc 25° và 65° phụ nhau nên $\sin 25^\circ = \cos 65^\circ$, từ đó

$$\sin^2 25^\circ + \sin^2 65^\circ = \cos^2 65^\circ + \sin^2 65^\circ = 1.$$

Tương tự, do hai góc 35° và 55° phụ nhau nên

$$\sin^2 35^\circ + \sin^2 55^\circ = \cos^2 55^\circ + \sin^2 55^\circ = 1.$$

Ta đã biết $\sin^2 45^\circ = \frac{1}{2}$.

Vậy $\sin^2 25^\circ + \sin^2 35^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 65^\circ = 2{,}5$.

4.6. Tam giác ABC vuông tại A có $AB = 5$, $AC = 12$ thì AB là cạnh ngắn nhất của tam giác (trong tam giác vuông cạnh góc vuông bé hơn cạnh huyền). Do đó cần tính $\sin C$.

Theo định lí Pythagore, ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$

nên $BC = 13$. Vậy $\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{BC} = \frac{5}{13}$.

4.7. (H.4.23) Trong tam giác ABC có $\widehat{B} = 90^\circ$, $\widehat{A} = 30^\circ$ nên $\widehat{C} = 60^\circ$.

Vì $\widehat{C} = 60^\circ$, $\widehat{CBD} = 30^\circ$ nên $\widehat{BDC} = 90^\circ$.

Do đó trong tam giác vuông ABD có

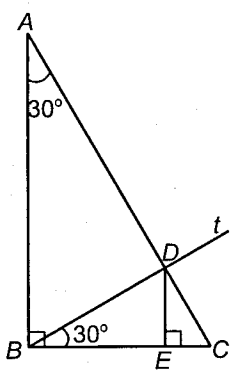
$$\frac{BD}{AB} = \sin\widehat{BAD} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

Gọi E là chân đường vuông góc kẻ từ D lên BC thì DE là khoảng cách từ D đến đường thẳng BC.

Trong tam giác vuông BDE có

$$\frac{DE}{BD} = \sin\widehat{DBE} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

Vậy $\frac{DE}{AB} = \frac{DE}{BD}\cdot\frac{BD}{AB} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, suy ra $DE = \frac{AB}{4}$.



Hình 4.23

4.8. a) Để ý rằng $0,4 = \frac{2}{5}$.

Vẽ góc vuông Axy, lấy B thuộc tia Ax sao cho $AB = 2$ cm. Vẽ đường tròn tâm B, bán kính 5 cm, nó cắt tia Ay tại C thì tam giác ABC vuông tại A, $AB = 2$ cm, $BC = 5$ cm nên $\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{5}$. Vậy $\widehat{ABC}$ là góc cần vẽ.

b) Vẽ góc vuông Axy, trên tia Ax lấy điểm B sao cho $AB = 3$ cm, trên tia Ay lấy điểm C sao cho $AC = 2$ cm thì được tam giác ABC vuông tại A, $AB = 3$ cm, $AC = 2$ cm nên $\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{3}$.

c) Bạn đọc tự làm.

4.9. Góc α cần tìm có $\sin\alpha = \frac{3}{3,2}$ nên dùng MTCT tìm được $\alpha \approx 70^\circ$.

4.10. Góc α mà dây diều tạo với mặt đất có $\sin\alpha = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ nên dùng MTCT tìm được $\alpha \approx 49^\circ$.

4.11. Tam giác ABC vuông tại A có $\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB} = 1$ thì $AB = AC$ nên ABC là tam giác vuông cân tại A.

4.12. a) Tam giác vuông đó có một góc nhọn α có $\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ nên $\alpha = 30^\circ$, góc nhọn kia của tam giác là góc $90^\circ - \alpha = 60^\circ$.

b) Đường chéo tạo với hai cạnh của hình chữ nhật hai góc α và $90^\circ - \alpha$, trong đó góc α có $\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, nên $\alpha = 30^\circ$. Vậy hai góc đó là góc 30° và góc 60°.

4.13.

α	10°	20°	30°	40°
$\tan\alpha$	0,176	0,364	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ ($\approx 0,577$)	0,839
$\cot\alpha$	5,671	2,747	$\sqrt{3}$ ($\approx 1,732$)	1,192

4.14. Gọi α là góc kề đáy thì $\tan\alpha = \frac{5}{4}$, $\cot\alpha = \frac{4}{5}$.

4.15. Theo định nghĩa tỉ số lượng giác của góc nhọn nhờ tỉ số hai cạnh của tam giác vuông, ta thấy ngay với mọi góc nhọn α ta có

$$\tan\alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}} = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}} : \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

và tương tự, $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

b) Từ định nghĩa của các tỉ số lượng giác của góc nhọn và định lí Pythagore trong tam giác vuông, suy ra với mọi góc nhọn α, ta có $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$,

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Từ đó $1 + \tan^2\alpha = 1 + \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

4.16. Biết $\tan\alpha = \dfrac{3}{4}$, từ $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ suy ra

$\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \dfrac{9}{16} = \dfrac{25}{16}$ nên $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$.

Từ đẳng thức $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, suy ra $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$.

4.17. Ta đã biết qua ví dụ 5, khi cho số đo góc nhọn α tăng lên thì $\tan\alpha$ tăng lên, tức là $\alpha < \beta < 90^\circ$ thì $\tan\alpha < \tan\beta$.

a) Vậy nếu $\alpha < \beta < 90^\circ$ thì:

$$\tan^2\alpha < \tan^2\beta \Rightarrow 1 + \tan^2\alpha < 1 + \tan^2\beta \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} < \frac{1}{\cos^2\beta}$$

$\Rightarrow \cos^2\alpha > \cos^2\beta \Rightarrow \cos\alpha > \cos\beta$.

b) Theo câu a) nếu $\alpha < \beta < 90^\circ$ thì suy ra $\cos^2\alpha > \cos^2\beta$

$\Rightarrow 1 - \cos^2\alpha < 1 - \cos^2\beta$ hay $\sin^2\alpha < \sin^2\beta$, do đó $\sin\alpha < \sin\beta$.

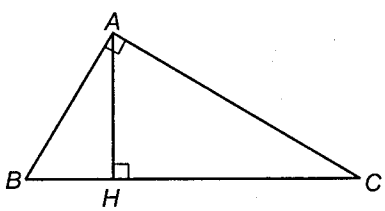
BÀI 12. MỘT SỐ HỆ THỨC GIỮA CẠNH, GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG VÀ ỨNG DỤNG

4.18. (H.4.24)

Trong tam giác vuông ABC, ta có $\cos C = \dfrac{AC}{BC}$;

Trong tam giác vuông HAC, ta có $\cos C = \dfrac{HC}{AC}$.

Vậy $\dfrac{HC}{AC} = \dfrac{AC}{BC}$, tức là $AC^2 = BC \cdot HC$.



Hình 4.24

4.19. (H.4.24) Trong tam giác vuông ABH, ta có $\tan\widehat{ABH} = \dfrac{AH}{BH}$.

Trong tam giác vuông CAH, ta có $\tan\widehat{ACH} = \dfrac{AH}{HC}$.

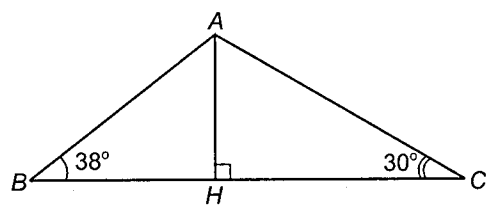
Hai góc ABH và ACH là hai góc phụ nhau nên

$\tan\widehat{ABH} = \cot\widehat{ACH} = \dfrac{1}{\tan\widehat{ACH}}$, tức là $\dfrac{AH}{BH} = \dfrac{HC}{AH}$. Suy ra $AH^2 = HB \cdot HC$.

4.20. (H.4.24) Ta có $\sin B = \dfrac{AH}{AB}$, $\cos B = \sin C = \dfrac{AH}{AC}$ nên $\dfrac{1}{AB} = \dfrac{\sin B}{AH}$, $\dfrac{1}{AC} = \dfrac{\cos B}{AH}$.

Từ đó $\dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{\sin^2 B + \cos^2 B}{AH^2} = \dfrac{1}{AH^2}$.

4.21. (H.4.25) Vì hai góc B và C của tam giác ABC đều nhọn nên đường cao AH có chân đường cao H nằm giữa B và C.



Hình 4.25

Tam giác ABH vuông tại H, $AH = h$, $BH = \dfrac{h}{\tan 38^\circ}$.

Tam giác ACH vuông tại H, $CH = \dfrac{h}{\tan 30^\circ}$.

Ta có $11 = BC = BH + CH = \dfrac{h}{\tan 38^\circ} + \dfrac{h}{\tan 30^\circ} = h\left(\dfrac{1}{\tan 38^\circ} + \dfrac{1}{\tan 30^\circ}\right)$.

Từ đó $h = \dfrac{11}{\dfrac{1}{\tan 38^\circ} + \dfrac{1}{\tan 30^\circ}} \approx 3{,}652$ (cm).

4.22. a) Biết cạnh huyền $BC = a$, và góc nhọn B.

Ta có $\hat{C} = 90^\circ - \hat{B}$; $c = a\cos B$, $b = a\sin B$.

Khi $a = 5$, $\hat{B} = 50^\circ$ thì $\hat{C} = 40^\circ$, $c = 5\cos 50^\circ \approx 3{,}214$; $b = 5\sin 50^\circ \approx 3{,}830$.

b) Biết cạnh góc nhọn b và góc đối diện B, ta có

$\hat{C} = 90^\circ - \hat{B}$, $b = a \cdot \sin B$ nên $a = \dfrac{b}{\sin B}$, $b = c \cdot \tan B$ nên $c = \dfrac{b}{\tan B}$.

Khi $b = 5$, $\widehat{B} = 40^\circ$ thì $\widehat{C} = 50^\circ$, $a = \dfrac{5}{\sin 40^\circ} \approx 7{,}779$; $c = \dfrac{5}{\tan 40^\circ} \approx 5{,}959$.

c) Biết một cạnh góc vuông b và góc nhọn không đối diện C.

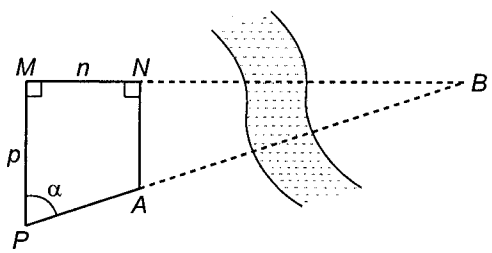
Ta có $\widehat{B} = 90^\circ - \widehat{C}$, $a = \dfrac{b}{\cos C}$, $c = b \cdot \tan C$.

Khi $b = 5$, $\widehat{C} = 55^\circ$ thì $\widehat{B} = 35^\circ$, $a = \dfrac{5}{\cos 55^\circ} \approx 8{,}717$, $c = 5 \cdot \tan 55^\circ \approx 7{,}141$.

4.23. (H.4.26) Vì $AN // PM$ nên $\widehat{BAN} = \widehat{BPM} = \alpha$. Trong tam giác vuông BAN và BPM có $BN = AB\sin\alpha$, $BM = PM\tan\alpha = p\tan\alpha$.

Do $BM - BN = MN = n$, suy ra $p\tan\alpha - AB\sin\alpha = n$.

Từ đó $AB = \dfrac{p\tan\alpha - n}{\sin\alpha}$.



Hình 4.26

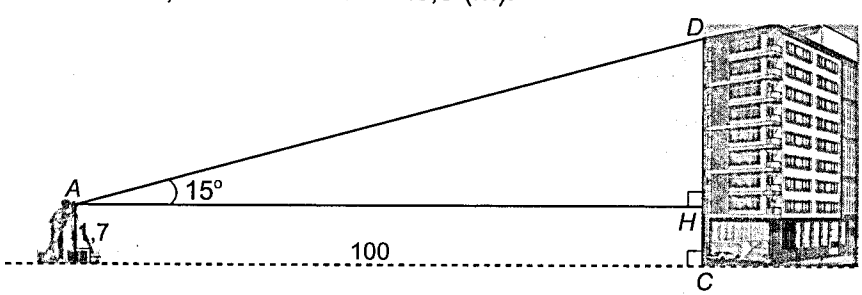
4.24. Ta có thể mô tả như sau: gọi C là chân toà nhà, D là điểm trên nóc toà nhà, A là nơi đặt mắt giác kế (H.4.27).

Kẻ đường cao AH của tam giác ACD thì:

$CH = 1{,}7$ m, $AH = 100$ m, $\widehat{DAH} = 15^\circ$.

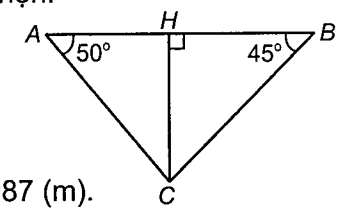
Trong tam giác vuông AHD ta có $HD = AH\tan\widehat{DAH} = 100\tan 15^\circ$. Vì H ở giữa C và D nên

$CD = CH + HD = 1{,}7 + 100\tan 15^\circ \approx 28{,}5$ (m).



Hình 4.27

4.25. (H.4.28) Tam giác ABC có $AB = 2\,000$ m, $\widehat{A} = 50^\circ$, $\widehat{B} = 45^\circ$. Kẻ đường cao AH thì H nằm giữa A và B vì hai góc A, B đều nhọn.



Hình 4.28

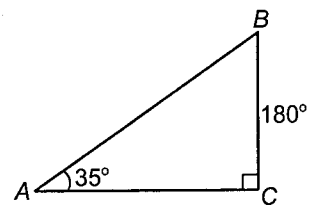
Trong tam giác vuông ACH và BCH có

$AH = HC\cot A$; $HB = HC\cot B$

nên $AB = AH + HB = HC(\cot A + \cot B)$.

Do đó $HC = \dfrac{AB}{\cot A + \cot B} = \dfrac{2\,000}{\cot 50^\circ + \cot 45^\circ} \approx 1\,087$ (m).

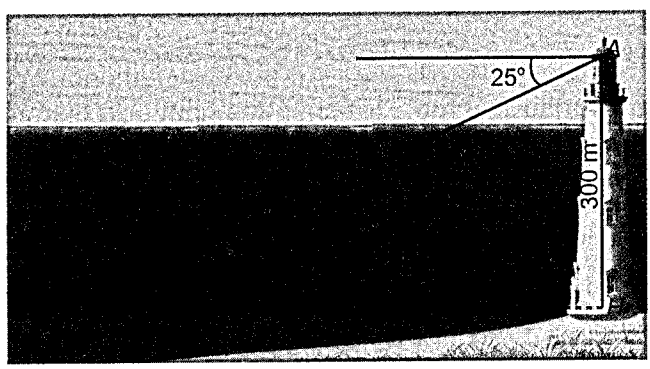
4.26. (H.4.29) Khẩu cao xạ ở vị trí A, máy bay ở vị trí B, lấy điểm C sao cho AC mô tả đường nằm ngang qua A, BC là đường thẳng đứng (với mặt đất).



Hình 4.29

Trong tam giác ABC vuông tại C, $BC = 1\,800$, $\widehat{BAC} = 35^\circ$, cần tính AB. Trong tam giác vuông ABC, ta có $BC = AB \cdot \sin A$ nên $AB = \dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{1\,800}{\sin 35^\circ} \approx 3\,138$ (m).

4.27. (H.4.30) Giả sử đài quan sát ở vị trí A, tàu ở vị trí B, gọi H là chân đài quan sát, coi AH vuông góc với BH thì ta có $AH = 300$ m, $\widehat{ABH} = 25^\circ$, cần tính BH. Trong tam giác vuông ABH ta có $AH = BH \cdot \tan\widehat{ABH}$ nên $BH = \dfrac{AH}{\tan\widehat{ABH}} = \dfrac{300}{\tan 25^\circ} \approx 643$ (m).



Hình 4.30

ÔN TẬP CHƯƠNG IV

A. Câu hỏi (Trắc nghiệm)

1. C. 2. C. 3. D.

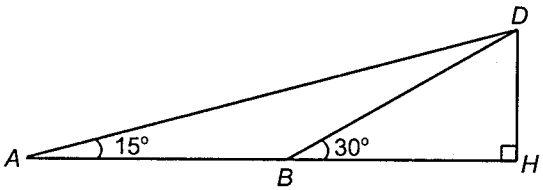
B. Bài tập

4.28. Góc nhọn B của tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 2\widehat{C}$ thì $\widehat{B} + \widehat{C} = 3\widehat{C} = 90^\circ$, suy ra $\widehat{C} = 30^\circ$. Vì $\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$ nên $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{1}{2}$ tức là $BC = 2AB$.

4.29. (H.4.31) Trong tam giác HDB vuông tại H, ta có

$$\sin\widehat{HBD} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \text{ nên } BD = 2HD.$$

Tam giác ABD có $\widehat{ABD} = 150^\circ$, $\widehat{BAD} = 15^\circ$ nên $\widehat{ADB} = 15^\circ$, do đó tam giác ABD cân tại B, tức là $BD = AB$. Suy ra $AB = BD = 2HD$ nên $HD = \frac{1}{2}AB$.



Hình 4.31

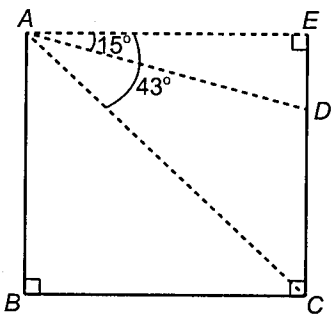
4.30. (H.4.32) Trong tam giác ABC vuông tại B, ta có

$AB = BC\tan\widehat{ACB} = 32\tan 43^\circ \approx 30$ (m).

Trong tam giác DEA vuông tại E, ta có

$ED = AE\tan\widehat{EAD} = 32\tan 15^\circ \approx 9$ (m).

Do đó, toà nhà cao tầng có chiều cao $BA \approx 30$ m và toà nhà thấp hơn có chiều cao $CD = CE - ED = AB - ED \approx 21$ (m).



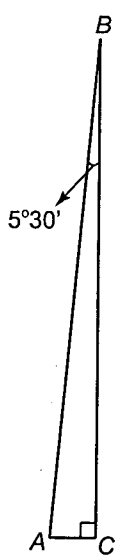
Hình 4.32

4.31. (H.4.33) Gọi A là chân đỉnh tháp, B là đỉnh tháp, C là bóng chiếu thẳng đứng của đỉnh tháp thì tam giác ABC vuông tại C, $BC = 58$ m, $\widehat{B} = 5^\circ 30'$.

Vậy bóng của tháp là đoạn AC.

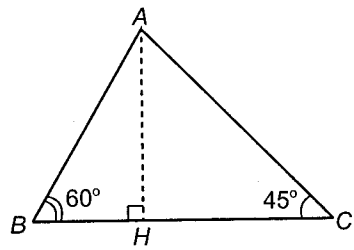
Trong tam giác vuông ABC có

$AC = BC \cdot \tan B = 58 \cdot \tan 5^\circ 30' \approx 5{,}58$ (m) $= 56$ (dm).



Hình 4.33

4.32. (H.4.34) Vì hai góc $\hat{B}$ và $\hat{C}$ của tam giác ABC là góc nhọn nên H nằm giữa B và C.



Hình 4.34

Tam giác ABH vuông tại H, có $\hat{B} = 60^\circ$ nên $AH = BH\tan B = BH\sqrt{3}$, do đó $BH = \dfrac{AH}{\sqrt{3}}$.

Tam giác ACH vuông cân nên $CH = AH$. Vậy $6 = BC = BH + CH = AH\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} + 1\right)$, từ đó

$$AH = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = 3(3-\sqrt{3}).$$

4.33. (H.4.35) Vì $\widehat{CAB} = 120^\circ$ là góc tù nên chân K của đường cao CK của tam giác ABC nằm ngoài AB, $\widehat{CAK} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

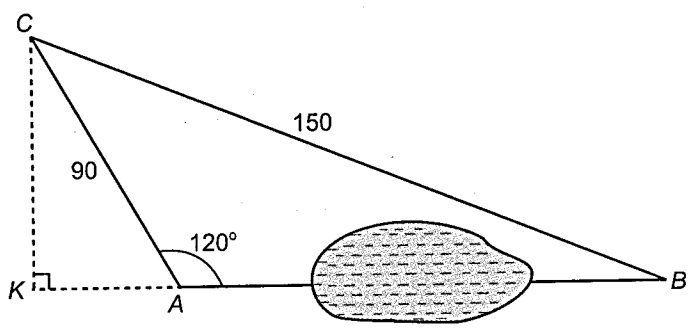
Tam giác CAK vuông tại K, $\hat{A} = 60^\circ$ nên $AK = AC\cos 60^\circ = \dfrac{AC}{2} = 45$ (m),

$$CK = AC\sin 60^\circ = AC\frac{\sqrt{3}}{2} = 45\sqrt{3} \text{ (m)}$$

Tam giác BCK vuông tại K nên theo định lí Pythagore, ta có

$BK^2 = BC^2 - CK^2 = 150^2 - 45^2 \cdot 3 = 15^2 \cdot 73$ nên $BK = 15\sqrt{73}$ (m).

Vậy $AB = BK - AK = 15\sqrt{73} - 45 \approx 83$ (m).



Hình 4.35

4.34. Gọi H là hình chiếu vuông góc của cầu thủ đứng tại A lên đường thẳng chứa khung thành thì ta được tam giác AHM vuông tại H, $AH = 18$ m, $\widehat{HAM} = 20^\circ$.

Ta có $\cos\widehat{HAM} = \dfrac{AH}{AM}$ nên $AM = \dfrac{AH}{\cos 20^\circ} = \dfrac{18}{\cos 20^\circ} \approx 19{,}2$ (m).

4.35. Trong tam giác AIK vuông tại I và BIK vuông tại I, ta có

$IA = IK\tan\widehat{AKI} = IK\tan 65^\circ$; $IB = IK\tan 50^\circ$.

Vậy $AB = IA - IB = IK(\tan 65^\circ - \tan 50^\circ) = 380(\tan 65^\circ - \tan 50^\circ) \approx 362$ (m).

4.36. Áp dụng bài tập 4.23 với $p = 20$ m, $n = 5$ m, $\alpha = 60^\circ$.

Do $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$, $\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, suy ra

$$CD = \frac{20\sqrt{3} - 5}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2(20\sqrt{3} - 5)}{\sqrt{3}} = \frac{120 - 10\sqrt{3}}{3} \approx 34 \text{ (m)}.$$

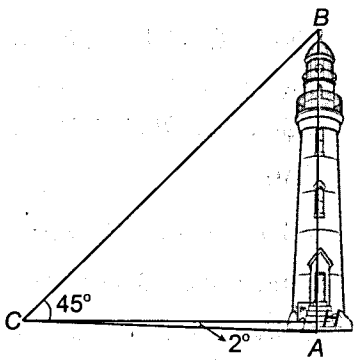
4.37. (H.4.36) Chân hải đăng ở vị trí điểm A, đỉnh hải đăng ở vị trí điểm B, đầu người quan sát ở vị trí điểm C.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AB thì theo giả thiết, ta có H nằm giữa A và B, $CH = 50$ m.

Tam giác ACH vuông tại H, $\widehat{ACH} = 2^\circ$ nên $AH = CH\tan 2^\circ = 50\tan 2^\circ$.

Tam giác CBH vuông tại H, $\widehat{BCH} = 45^\circ$ nên là tam giác cân, $HB = CH = 50$.

Suy ra $AB = AH + HB = 50(\tan 2^\circ + 1) \approx 52$ (m).



Hình 4.36

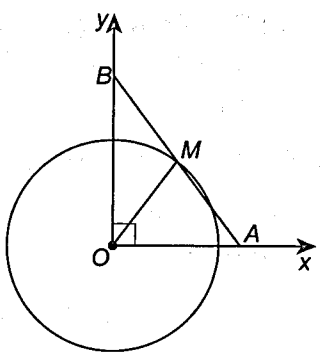
CHƯƠNG V. ĐƯỜNG TRÒN

BÀI 13. MỞ ĐẦU VỀ ĐƯỜNG TRÒN

5.1. Các bánh xe có dạng hình tròn để khi chuyển động, trục bánh xe luôn giữ một khoảng cách không đổi đối với mặt đường (bằng bán kính bánh xe). Điều đó giúp người ngồi trên xe không bị trồi lên trồi xuống (nếu đường bằng phẳng).

5.2. (H.5.13) Áp dụng định lí Pythagore vào tam giác vuông AOB để tính được $AB = 5$ cm, từ đó suy ra $OM = \dfrac{1}{2}AB = 2{,}5$ cm.

Vậy M nằm trên đường tròn (O).



Hình 5.13

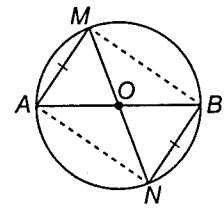
5.3. a) $C(0; 3)$, $D(-2; 0)$.

b) A và C nằm trên đường tròn $(O; 3)$; B và D nằm trong đường tròn $(O; 3)$.

5.4. a) $B(3; -1)$, $C(-3; -1)$, $D(-3; 1)$.

b) Bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên đường tròn $(O; \sqrt{10})$.

5.5. (H.5.14) *Cách 1.* Dễ thấy $\Delta AOM = \Delta BON$ (c.c.c), suy ra $\widehat{MAO} = \widehat{NBO}$, mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $AM // BN$, suy ra tứ giác $AMBN$ là hình bình hành (hai cạnh đối AM và BN song song và bằng nhau). Do đó, hai đường chéo AB và MN cắt nhau tại trung điểm O của AB. Vậy O là trung điểm của MN.



Hình 5.14

Cách 2. $\Delta AOM = \Delta BON$ (c.c.c), suy ra $\widehat{AOM} = \widehat{BON}$. Do AB là đường kính nên A, O, B thẳng hàng và ta có $\widehat{AOM} + \widehat{MOB} = 180°$. Từ hai đẳng thức trên suy ra $\widehat{BON} + \widehat{MOB} = \widehat{MON} = 180°$. Do đó ba điểm M, O, N thẳng hàng. Mặt khác, $OM = ON$ (bán kính) nên O là trung điểm của MN.

Chú ý

- Trên đây ta đã chứng minh đẳng thức $\widehat{AOM} = \widehat{BON}$ dựa vào hai tam giác bằng nhau. Chớ nhầm tưởng rằng đẳng thức đó được suy ra từ "$\widehat{AOM}$ và $\widehat{BON}$ là hai góc đối đỉnh", bởi vì chưa khẳng định được ba điểm M, O, N thẳng hàng.
- Ta đã chứng minh ba điểm M, O, N thẳng hàng bằng cách chứng minh $\widehat{MON} = 180°$.

BÀI 14. CUNG VÀ DÂY CỦA MỘT ĐƯỜNG TRÒN

5.6. (HS tự vẽ hình)

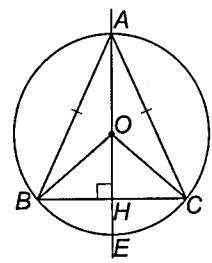
a) HS tự chứng minh.

b) Do góc A nhọn nên dây DE của đường tròn đường kính AH không qua tâm (suy ra từ: nếu AH đi qua tâm – trung điểm của AH, thì tam giác ADE vuông tại A).

5.7. (H.5.15) a) Theo giả thiết ta có $\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{EC}$. (1)

Vì $AB = AC$ nên $\Delta OAB = \Delta OAC$ (c.c.c), suy ra $\widehat{AOB} = \widehat{AOC}$.

Từ đó ta có $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CA}$. (2)



Hình 5.15

Từ (1) và (2) ta có sđ $\overset{\frown}{AB}$ + sđ $\overset{\frown}{BE}$ = sđ $\overset{\frown}{EC}$ + sđ $\overset{\frown}{CA}$. (3)

Do B thuộc cung ABE và C thuộc cung ECA nên

$$\text{sđ}\overset{\frown}{AB} + \text{sđ}\overset{\frown}{BE} = \text{sđ}\overset{\frown}{ABE} \text{ và } \text{sđ}\overset{\frown}{EC} + \text{sđ}\overset{\frown}{CA} = \text{sđ}\overset{\frown}{ECA}. \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra sđ $\overset{\frown}{ABE}$ = sđ $\overset{\frown}{ECA}$.

Mặt khác, ta có sđ $\overset{\frown}{ABE}$ + sđ $\overset{\frown}{ECA}$ = 360°.

Do đó sđ $\overset{\frown}{ABE}$ = sđ $\overset{\frown}{ECA}$ = $\dfrac{360°}{2}$ = 180°.

Điều đó chứng tỏ cung ABE là nửa đường tròn.

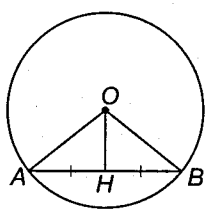
Vậy ba điểm A, O và E thẳng hàng.

b) Vì AE đi qua O nên AE là đường kính, còn AB là một dây không qua O nên $AB < AE$. Mặt khác, trong tam giác vuông HAB (tại H) ta có AB là cạnh huyền nên $AH < AB$. Hai bất đẳng thức trên viết gộp lại thành $AH < AB < AE$ (đpcm).

Chú ý. Hệ thức $AB < AE$ cũng có thể suy ra từ AE là cạnh huyền trong tam giác vuông ABE ($\widehat{B} = 90°$).

5.8. (H.5.16) a) Ta có $OA = OB$ (bán kính đường tròn) nên tam giác OAB cân tại O. Theo giả thiết, H là trung điểm của AB. Vậy OH là trung tuyến của tam giác cân OAB. Do đó OH cũng là đường cao, suy ra $OH \perp AB$.

b) Do $OH \perp AB$ nên khoảng cách từ O đến AB là độ dài của đoạn OH. Vậy ta cần tính OH.



Hình 5.16

Áp dụng định lí Pythagore vào tam giác vuông AOH, ta có $OA^2 = OH^2 + AH^2$.

Theo đề bài, $OA = 5$ cm; $AH = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$ (cm) nên

$$OH^2 = OA^2 - AH^2 = 5^2 - 4^2 = 9.$$

Từ đó, $OH = 3$ cm.

5.9. a) 90°; b) 180°; c) 120°; d) 30°.

HD: Cứ mỗi giờ, kim dài (kim phút) di chuyển được một vòng; kim ngắn (kim giờ) di chuyển được $\dfrac{1}{12}$ vòng, ứng với cung 30°.

5.10. 200°.

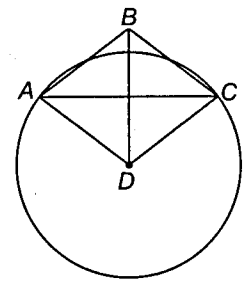
HD: sđ $\overset{\frown}{BA}$ + sđ $\overset{\frown}{AC}$ = 110° + 50° = 160° < 180° nên số đo của cung nhỏ BC bằng 160°.

BÀI 15. ĐỘ DÀI CỦA CUNG TRÒN. DIỆN TÍCH HÌNH QUẠT TRÒN VÀ HÌNH VÀNH KHUYÊN

5.11. (H.5.17) a) HS tự giải.

b) Độ dài cung nhỏ AC bằng $\frac{7}{2}\pi$; diện tích hình quạt tròn ứng với cung nhỏ AC bằng $\frac{21}{2}\pi$.

HD: Trong hình thoi (cũng là hình bình hành) $ABCD$, hai góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{ADC}$ kề với cạnh AD nên bù nhau. Do đó $\widehat{BAD} + \widehat{ADC} = 180°$ hay $75° + \widehat{ADC} = 180°$, suy ra $\widehat{ADC} = 105°$. Vậy cung nhỏ AC có số đo bằng $105°$.



Hình 5.17

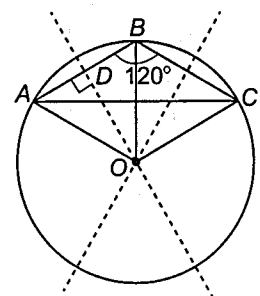
5.12. Với các kí hiệu quen thuộc, ta có $\frac{l}{C} = \frac{2}{5} = \frac{n}{360} = \frac{S_q}{S}$. Do đó

$$S_q = \frac{2}{5} \cdot S = \frac{2}{5} \cdot 20 = 8 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

5.13. (H.5.18) a) Gọi O là tâm của hình tròn (ao), ta có $OA = OC$. Vậy O thuộc đường trung trực của AC. Mà tam giác ABC cân tại B nên đường trung trực của AC cũng là phân giác của góc ABC, suy ra

$$\widehat{ABO} = \frac{1}{2}\widehat{ABC} = 60°.$$

Tam giác cân AOB ($OA = OB$) có $\widehat{ABO} = 60°$ nên là tam giác đều. Do đó $AO = AB = 10$ m. Vậy bán kính của ao cá bằng 10 m.



Hình 5.18

b) • Độ dài quãng đường từ chòi A đến chòi B cũng chính là độ dài cung nhỏ AB. Ở câu a, ta đã biết $\widehat{AOB} = 60°$ và bán kính đường tròn là 10 m nên quãng đường đó dài $\frac{60}{180} \cdot \pi \cdot 10 = \frac{10}{3}\pi \approx 10{,}5$ (m).

• Từ kết quả câu a, ta thấy hai cung AB và BC có cùng số đo bằng $60°$ nên chúng bằng nhau, độ dài của chúng cũng bằng nhau. Do đó, quãng đường từ A đến C men theo bờ ao bằng 2 lần độ dài cung AB, tức là $\frac{20}{3}\pi \approx 20{,}9$ (m).

5.14. Quãng đường đi được của Trái Đất trong 1 ngày bằng $\frac{1}{365}$ quãng đường đi trong 1 năm, tức là bằng $\frac{1}{365}(2 \cdot 150\,000\,000 \cdot \pi) \approx 2\,582\,000$ (km).

5.15. • Cung tròn ứng với hình quạt biểu thị tỉ lệ học sinh được xếp loại "tốt" có số đo bằng:

$$35\% \cdot 360° = 126°.$$

• Cung tròn ứng với hình quạt biểu thị tỉ lệ học sinh được xếp loại "khá" có số đo bằng:

$$40\% \cdot 360° = 144°.$$

• Cung tròn ứng với hình quạt biểu thị tỉ lệ học sinh được xếp loại "đạt" có số đo bằng:

$$25\% \cdot 360° = 90°.$$

5.16. a) Cung 45°.

b) Ta cần tính đường kính của chiếc bánh. Diện tích bề mặt mỗi miếng bánh là 60 cm^2 nên diện tích cả chiếc bánh là $8 \cdot 60 = 480$ (cm^2). Nếu R là bán kính của chiếc bánh thì ta có $\pi R^2 = 480$.

Từ đó suy ra $R^2 = \frac{480}{\pi}$ hay $R = \sqrt{\frac{480}{\pi}} \approx 12{,}4$ (cm), suy ra đường kính chiếc bánh khoảng 24,8 cm. Do đó, để có thể đặt lọt chiếc bánh vào hộp, chiều dài tối thiểu cạnh đáy của chiếc hộp là 25 cm.

BÀI 16. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

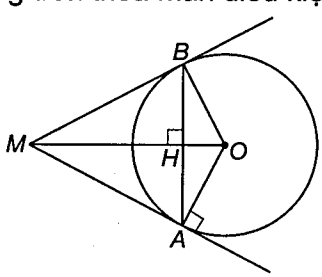
5.17. a) HS tự giải.

b) *HD*: Chứng minh $PA \perp OA$ và $PB \perp OB$ bằng cách xét các tam giác AOP và BOP rồi sử dụng dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến.

5.18. *HD:* Sử dụng dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến. Có 2 điểm thuộc b và cách M một khoảng bằng R; tương ứng ta vẽ được hai đường tròn thoả mãn điều kiện của đề bài.

5.19. (H.5.19) Gọi H là giao điểm của MO với AB.

a) Hai tam giác vuông AOH và BOH có OH là cạnh chung, $OA = OB$ (bằng bán kính của (O)), nên chúng bằng nhau, suy ra $\widehat{AOH} = \widehat{BOH}$, tức là $\widehat{AOM} = \widehat{BOM}$.



Hình 5.19

Hai tam giác AOM và BOM có OM là cạnh chung, $\widehat{AOM} = \widehat{BOM}$ (chứng minh trên) và $AO = BO$ (bằng bán kính của (O)) nên chúng bằng nhau (c.g.c), suy ra $\widehat{OBM} = \widehat{OAM}$.

Mà $\widehat{OAM} = 90°$ (do MA tiếp xúc với (O) tại A) nên $\widehat{OBM} = 90°$.

Điều đó chứng tỏ $MB \perp OB$. Vậy MB là tiếp tuyến của (O).

b) Ta có $MA = MB$ (tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn (O)) nên tam giác MAB là tam giác cân. Tam giác cân đó có $\widehat{MAB} = 60°$ (giả thiết) nên là tam giác đều, suy ra $\widehat{AMB} = 60°$.

Xét tứ giác $AOBM$, ta có $\widehat{AOB} + \widehat{OBM} + \widehat{BMA} + \widehat{MAO} = 360°$, tức là

$$\widehat{AOB} + 90° + 60° + 90° = 360°, \text{ suy ra } \widehat{AOB} = 120°.$$

Vậy sđ $\overset{\frown}{AB} = 120°$. Do đó, nếu gọi S_q là diện tích hình quạt tròn ứng với cung nhỏ AB thì $S_q = \dfrac{120}{360}\pi \cdot 3^2 = 3\pi$ (cm^2). (1)

Ta có $\widehat{AOM} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOB} = 60°$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau). Do đó, trong tam giác vuông AOM ta tính được $AM = AO \cdot \tan\widehat{AOM} = 3 \cdot \tan 60° = 3\sqrt{3}$ (cm).

Mặt khác, $\Delta AOM = \Delta BOM$ nên nếu gọi S_{AOBM} là diện tích tứ giác $AOBM$, S_{AOM} là diện tích tam giác AOM, ta có

$$S_{AOBM} = 2S_{AOM} = OA \cdot AM = 3 \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3} \ (cm^2). \quad (2)$$

Cuối cùng, nếu S là diện tích phần của tam giác AMB bên ngoài (O) thì từ (1) và (2) ta có $S = S_{AOBM} - S_q = 9\sqrt{3} - 3\pi$ (cm^2).

Chú ý. Nếu tính diện tích S_{AMB} của tam giác AMB rồi trừ đi diện tích S_{vp} của hình viên phân ứng với cung AB thì ta có các kết quả như sau:

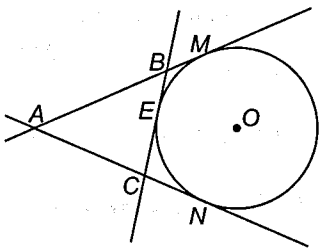
$$S_{AMB} = \frac{1}{2}AM^2 \sin 60° = \frac{1}{2}\left(3\sqrt{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{4};$$

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}AB \cdot OH = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4};$$

$$S_{vp} = S_q - S_{AOB} = 3\pi - \frac{9\sqrt{3}}{4};$$

$$S = S_{AMB} - S_{vp} = \frac{27\sqrt{3}}{4} - 3\pi + \frac{9\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} - 3\pi \ (cm^2).$$

5.20. (H.5.20) Vì AM và AN, BM và BE, CN và CE là những cặp tiếp tuyến cắt nhau của (O) nên ta có $AM = AN$, $BM = BE$ và $CN = CE$. Do đó:



Hình 5.20

• $AM + AN = AB + BM + AC + CE$

$= AB + AC + (BE + CE)$

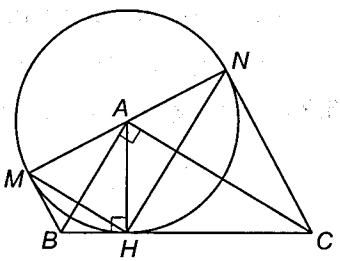
hay $2AM = 10 + 7 + 6 = 23$ (cm).

Vậy $AM = AN = \dfrac{23}{2} = 11{,}5$ (cm).

• $BM = AM - AB = 11{,}5 - 10 = 1{,}5$ (cm).

• $CN = AN - AC = 11{,}5 - 7 = 4{,}5$ (cm).

5.21. (H.5.21) a) HS tự chứng minh.



Hình 5.21

b) Do M đối xứng với H qua AB nên $AM = AH$ và $BM = BH$, suy ra $\Delta MAB = \Delta HAB$ (c.c.c). Do đó $\widehat{AMB} = \widehat{AHB} = 90°$. Mặt khác, $AM = AH$ còn chứng tỏ $M \in (A)$. Vậy BM vuông góc với AM tại M, suy ra BM là tiếp tuyến của (A) tại M.

Kết luận AN là tiếp tuyến của (A) tại N cũng được chứng minh tương tự.

c) Ở câu b, ta đã chứng minh $\Delta MAB = \Delta HAB$, suy ra $\widehat{MAB} = \widehat{HAB}$; tương tự, $\Delta NAC = \Delta HAC$ suy ra $\widehat{HAC} = \widehat{CAN}$. Ngoài ra, ta còn có $\widehat{HAB} + \widehat{HAC} = 90°$. Bởi vậy ta có:

$$\widehat{MAB} + \widehat{HAB} + \widehat{HAC} + \widehat{CAN} = 2(\widehat{HAB} + \widehat{HAC}) = 180°.$$

Điều đó cho thấy ba điểm M, A và N thẳng hàng. Vậy MN là một đường kính của (A).

d) Từ kết quả câu b và câu c, ta suy ra $BM \perp MN$ và $CN \perp MN$ và do đó $BM // CN$. Vậy tứ giác $BMNC$ là một hình thang vuông. Diện tích S của nó được tính như sau:

$$S = \frac{1}{2}MN(BM + CN). \qquad (1)$$

• Tính $BM + CN$: Ta có $BM = BH$ và $CN = NH$, suy ra

$$BM + CN = BH + CH = 2 + 4{,}5 = 6{,}5 \text{ (cm)}.$$

• Tính MN: Trong (A), MN là đường kính, AH là bán kính nên $MN = 2AH$. Do đó, ta cần tính AH. Ta có $\Delta HBA \backsim \Delta ABC$ (vì có $\widehat{BHA} = \widehat{BAC} = 90°$ và góc B chung) nên $\widehat{BAH} = \widehat{ACH}$.

Từ đó $\Delta HBA \backsim \Delta HAC$ (vì có $\widehat{BHA} = \widehat{CHA} = 90°$ và $\widehat{BAH} = \widehat{ACH}$ (theo chứng minh trên), suy ra $\frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH}$ hay $AH^2 = CH \cdot BH = 4{,}5 \cdot 2 = 9$, do đó $AH = 3$ cm và $MN = 2AH = 6$ cm.

Cuối cùng, thay các kết quả thu được vào (1) ta có $S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6{,}5 = 19{,}5$ (cm^2).

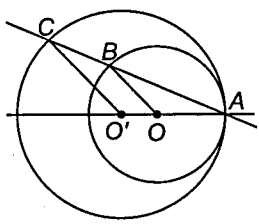
BÀI 17. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

5.22. a) cắt nhau;

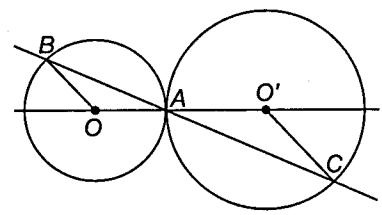
b) tiếp xúc ngoài với nhau;

c) không giao nhau (ngoài nhau).

5.23. (H.5.22) Ta có các hình sau đây, HS tự chứng minh kết luận.



O và O' nằm cùng phía đối với A



O và O' nằm khác phía đối với A

Hình 5.22

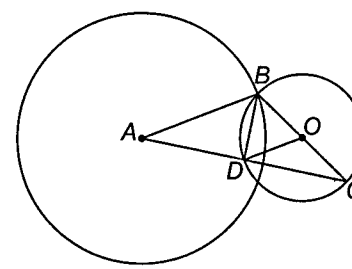
5.24. (H.5.23)

a) Từ giả thiết $R < OA < 3R$ suy ra

$$2R - R < OA < 2R + R.$$

Do đó hai đường tròn $(A; 2R)$ và $(O; R)$ cắt nhau.

b) Do tính đối xứng của đường tròn và do C đối xứng với B qua O, ta có $C \in (O)$. Vậy BC là một đường kính của $(O; R)$, còn AB là một bán kính của $(A; 2R)$. Do đó $BC = 2R = AB$, suy ra ABC là tam giác cân tại B.

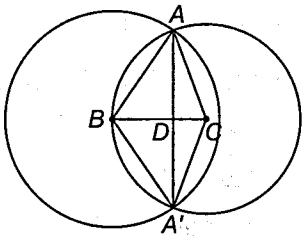


Hình 5.23

Mặt khác, tam giác BCD có DO là trung tuyến và $DO = \frac{BC}{2}$ nên BCD là tam giác vuông tại D. Vậy BD là đường cao của tam giác cân ABC. Do đó, BD cũng là đường trung tuyến của tam giác đó, nghĩa là $AD = DC$ (đpcm).

5.25. *HD*: Chứng minh tam giác ABD cân tại A và có AC là đường cao để suy ra AC cũng là đường trung tuyến, nghĩa là $BC = CD$.

5.26. (H.5.24) a) *HD*: Dựa vào bất đẳng thức tam giác đối với ΔABC.



Hình 5.24

b) $\Delta ABC = \Delta A'BC$ (c.c.c do có $AB = A'B$, $AC = A'C$, BC là cạnh chung), suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{A'BC}$. Vậy BC là đường phân giác của góc $\widehat{ABA'}$. Mặt khác, BAA' là tam giác cân tại B (do $BA = BA'$) nên BC cũng là đường trung trực của AA'. Do đó A và A' đối xứng với nhau qua BC.

c) Nếu gọi D là giao điểm của BC và AA' thì từ câu b ta có $AD = DA'$ và $BC \perp AA'$, vậy ABD và ACD là những tam giác vuông tại D.

Do $AD = DA'$ nên $AD = \dfrac{AA'}{2} = \dfrac{24}{2} = 12$ (cm). Áp dụng định lí Pythagore:

• Trong tam giác vuông ABD, ta có $BD^2 = AB^2 - AD^2 = 15^2 - 12^2 = 81$, suy ra $BD = 9$ cm.

• Trong tam giác vuông ADC, ta có $DC^2 = AC^2 - AD^2 = 13^2 - 12^2 = 25$, suy ra $DC = 5$ cm.

Vậy $BC = BD + DC = 9 + 5 = 14$ (cm).

ÔN TẬP CHƯƠNG V

A. Câu hỏi (Trắc nghiệm)

1. B. **2.** D. **3.** C. **4.** B. **5.** A. **6.** C.

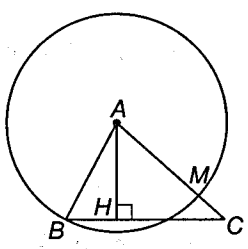
B. Bài tập

5.27. (H.5.25)

a) • Dễ thấy điểm B nằm trên $(A; AB)$.

• Theo giả thiết ta có $AC > AB$ nên điểm C nằm ngoài $(A; AB)$.

• Trong tam giác vuông ABH, AB là cạnh huyền nên ta có $AH < AB$, suy ra điểm H nằm trong $(A; AB)$.



Hình 5.25

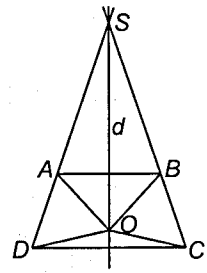
b) Do điểm C nằm ngoài đường tròn $(A; AB)$ nên AC cắt đường tròn đó tại một điểm nằm giữa A và C; gọi đó là điểm M. Khi đó:

• Hai đường tròn (A) và $(C; CD)$ tiếp xúc với nhau khi D trùng với M;

• Hai đường tròn (A) và $(C; CD)$ cắt nhau khi D nằm giữa A và M;

• Hai đường tròn (A) và $(C; CD)$ không giao nhau khi D nằm giữa C và M.

5.28. a) Xét 2 trường hợp:



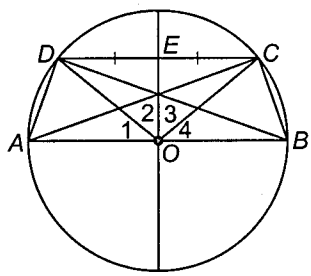
Hình 5.26

• Trường hợp 1: Hai cạnh bên DA và CB cắt nhau tại điểm S (H.5.26). Khi đó, do $ABCD$ là hình thang cân nên $\widehat{SAB} = \widehat{SBA} = \widehat{SDC} = \widehat{SCD}$, suy ra SAB và SDC là hai tam giác cân tại S (vì có hai góc ở đáy bằng nhau). Do đó, đường trung trực d của AB cũng là phân giác của góc S và cũng là trung trực của DC. Vậy A và D lần lượt đối xứng với B và C qua d.

• Trường hợp 2: $DA \,//\, CB$. Khi đó hình thang cân $ABCD$ trở thành hình chữ nhật và kết luận là dễ thấy.

b) Giả sử O là tâm của đường tròn đi qua ba điểm A, B và C. Khi đó, đường trung trực d của AB đi qua O (vì $OA = OB$). Vậy d là trục đối xứng của đường tròn (O). Theo câu a, D đối xứng với C qua d mà $C \in (O)$ nên $D \in (O)$, nghĩa là (O) đi qua D.

5.29. (H.5.27) a) • Theo đề bài, E là trung điểm của đoạn CD nên $EC = ED$. Mặt khác, ta có $OC = OD$. Do đó, đường thẳng OE là đường trung trực của đoạn CD. Vậy C và D đối xứng với nhau qua OE.



Hình 5.27

• Trên đây ta đã có $OE \perp CD$. Mặt khác, $CD \,//\, AB$ nên $OE \perp AB$. Hơn nữa, ta có $OA = OB$. Vậy OE cũng là đường trung trực của AB, nghĩa là A và B đối xứng với nhau qua OE.

b) Trong tam giác cân OCD, ta có OE là đường trung trực nên cũng là đường phân giác của góc COD, nghĩa là $\widehat{O_2} = \widehat{O_3}$, suy ra

$$\widehat{AOC} = \widehat{AOE} + \widehat{EOC} = 90° + \widehat{O_3} = \widehat{O_2} + 90° = \widehat{DOE} + \widehat{EOB} = \widehat{DOB}.$$

Hai tam giác cân AOC và DOB có các cạnh bên bằng nhau ($OA = OB = OC = OD$) và góc ở đỉnh bằng nhau ($\widehat{AOC} = \widehat{DOB}$) nên bằng nhau, suy ra $AC = DB$. Vậy hình thang $ABCD$ ($AB \,//\, CD$) có hai đường chéo AC và BD bằng nhau. Do đó, nó là hình thang cân.

c) Do $AB = 12$ cm là đường kính nên bán kính của (O) bằng 6 cm. Ngoài ra, khi $\overset{\frown}{COD} = 100°$, ta có $\widehat{O_2} = \widehat{O_3} = 50°$ và $\overset{\frown}{AOC} = \overset{\frown}{AOE} + \widehat{O_2} = 90° + 50° = 140°$.

• Xét cung nhỏ AD, ta có sđ$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AOD} = 90° - \widehat{O_2} = 90° - 50° = 40°$.

Vậy độ dài của cung nhỏ AD là: $l_{AD} = \dfrac{40}{180} \cdot \pi \cdot 6 = \dfrac{4}{3}\pi$ (cm).

• Xét cung lớn ABC, ta có sđ$\overset{\frown}{ABC} = 360° - \overset{\frown}{AOC} = 360° - 140° = 220°$.

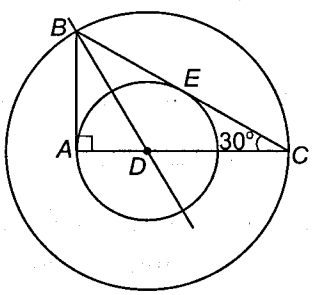
Vậy độ dài của cung lớn ABC là: $l_{ABC} = \dfrac{220}{180} \cdot \pi \cdot 6 = \dfrac{22}{3}\pi$ (cm).

d) Ta có $\overset{\frown}{BOD} = \overset{\frown}{BOE} + \widehat{O_2} = 90° + 50° = 140°$. Do đó, diện tích hình quạt tròn ứng với cung nhỏ BD là: $S_q = \dfrac{140}{360} \cdot \pi \cdot 6^2 = 14\pi$ (cm^2).

5.30. (H.5.28) a) *HD:* Chú ý rằng điểm D nằm trên đường phân giác của góc B nên D cách đều BC và BA.

b) *HD:* Chứng minh rằng $\overset{\frown}{DBC} = 30°$ để suy ra $\overset{\frown}{BDC} = 120°$. Trong tam giác vuông ABD, ta có $\widehat{ABD} = 30°$ nên $DA = AB\tan 30° = 3 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$ (cm).

Đáp số: $l = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ (cm); $S = \pi$ (cm^2).



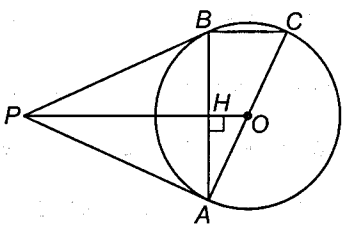
Hình 5.28

c) Ta có $\widehat{DBC} = \widehat{DCB} = 30°$ nên DBC là tam giác cân, suy ra $DC = BD$. Trong tam giác vuông ABD, ta có $BD = \dfrac{AB}{\cos 30°} = 3 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ (cm).

Vậy đường tròn $(D; DA)$ có bán kính $DA = \sqrt{3}$ cm, đường tròn $(D; DC)$ có bán kính $DC = 2\sqrt{3}$ cm. Do đó, diện tích của hình vành khuyên tạo bởi hai đường tròn đó là: $S_{vk} = \left[\left(2\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2\right]\pi = 9\pi$ (cm^2).

5.31. (H.5.29) a) *HD:* Để ý rằng PO là đường phân giác của góc P trong tam giác cân PAB.

b) *HD:* Dựa vào tính đối xứng của (O), suy ra $C \in (O)$ rồi chứng minh ABC là tam giác vuông.



Hình 5.29

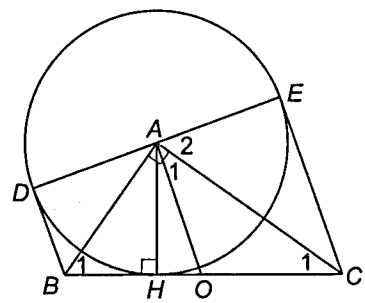
c) Vì PA tiếp xúc với (O) tại A nên $PA \perp OA$. Áp dụng định lí Pythagore trong tam giác vuông OAP ta có $PA^2 + OA^2 = OP^2$, suy ra $PA^2 = OP^2 - OA^2 = 5^2 - 3^2 = 16$. Vậy $PA = PB = 4$ cm.

Gọi H là giao điểm của PO với AB, ta có $AH \perp PO$. Xét tam giác vuông AHP ta có $AH \cdot OP = OA \cdot PA$ (bằng hai lần diện tích tam giác AOP).

Từ đó, $AH = (OA \cdot PA) : OP = (3 \cdot 4) : 5 = 2{,}4$ (cm), suy ra $AB = 2AH = 4{,}8$ cm.

Vậy tam giác PAB có $PA = PB = 4$ cm và $AB = 4{,}8$ cm.

5.32. (H.5.30) a) Do $BC \perp AH$ tại H nên BC là tiếp tuyến của (A); BD cũng là tiếp tuyến của (A) nên AB là đường phân giác của góc DAH (hai tiếp tuyến cắt nhau tại B), nghĩa là $\widehat{DAH} = 2\widehat{BAH}$. Tương tự, $\widehat{HAE} = 2\widehat{HAC}$.



Hình 5.30

Tam giác ABC vuông tại A nên $\widehat{BAH} + \widehat{HAC} = 90°$.

Do đó:

$$\widehat{DAH} + \widehat{HAE} = 2\widehat{BAH} + 2\widehat{HAC} = 2\left(\widehat{BAH} + \widehat{HAC}\right) = 2 \cdot 90° = 180°.$$

Điều đó chứng tỏ D, A, E là ba điểm thẳng hàng.

b) Gọi O là trung điểm của đoạn BC. Khi đó, trong tam giác vuông ABC có AO là đường trung tuyến nên $OA = OB = OC$. Do đó, đường tròn đường kính BC cũng là đường tròn $(O; OA)$. Ta có:

$\Delta ABC \backsim \Delta HBA$ (hai tam giác vuông có góc nhọn B chung);

$\Delta ABC \backsim \Delta HAC$ (hai tam giác vuông có góc nhọn C chung);

Từ đó $\Delta HBA \backsim \Delta HAC$. Mặt khác $\Delta HAC = \Delta EAC$ (hai tam giác vuông có chung cạnh huyền AC và $AH = AE$). Do đó $\Delta HBA \backsim \Delta EAC$, suy ra $\widehat{HBA} = \widehat{EAC}$ hay $\widehat{B_1} = \widehat{A_2}$. (1)

Do $OA = OC$ nên tam giác OAC cân tại A, suy ra $\widehat{OCA} = \widehat{OAC}$ hay $\widehat{C_1} = \widehat{A_1}$. (2)

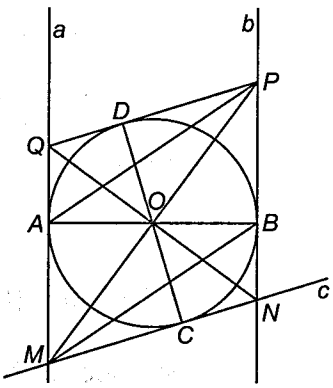
Để ý rằng $\widehat{B_1}$ và $\widehat{C_1}$ là hai góc nhọn của tam giác vuông ABC nên từ (1) và (2) ta có $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \widehat{B_1} + \widehat{C_1} = 90°$.

Điều đó chứng tỏ $DE \perp OA$. Do đó DE tiếp xúc với (O) tại A.

5.33. (H.5.31) a) HS tự chứng minh.

b) • Vì $C \in (O)$ và D đối xứng với C qua O nên do tính đối xứng của đường tròn, ta suy ra $D \in (O)$.

• Từ giác $AMBP$ có $OA = OB$ (bán kính của (O)) và $OM = OP$ (do P đối xứng với M qua O) nên có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Vậy $AMBP$ là hình bình hành, suy ra $BP // AM$. Do $A, M \in a$ nên $BP // a$. Mặt khác $b // a$. Vì qua điểm B chỉ có một đường thẳng song song với a nên đường thẳng BP trùng với b. Nói cách khác, $P \in b$.



Hình 5.31

• Khẳng định $Q \in a$ cũng được chứng minh tương tự (em hãy trình bày chứng minh này).

c) Ta có $OM = OP$ (M đối xứng với P qua O), $OC = OD$ (D đối xứng với C qua O) và $\widehat{MOC} = \widehat{POD}$ (hai góc đối đỉnh). Do đó $\Delta COM = \Delta DOP$ (c.g.c), suy ra $\widehat{PDO} = \widehat{MCO} = 90°$. Tương tự, ta cũng có $\Delta CON = \Delta DOQ$ (c.g.c), suy ra $\widehat{QDO} = \widehat{NCO} = 90°$. Từ đó ta có $\widehat{PDO} + \widehat{QDO} = \widehat{QDP} = 180°$. Điều đó chứng tỏ ba điểm P, D, Q thẳng hàng và PQ là tiếp tuyến của (O) tại D.

d) Tứ giác $MNPQ$ có hai đường chéo MP và NQ cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường nên là hình bình hành. Với hai tiếp tuyến cắt nhau tại M ta có $\widehat{AOM} = \widehat{COM}$. Với hai tiếp tuyến cắt nhau tại N ta có $\widehat{CON} = \widehat{BON}$. Từ đó suy ra:

$$\widehat{AOM} + \widehat{COM} + \widehat{CON} + \widehat{BON} = 180° \text{ hay } 2(\widehat{COM} + \widehat{CON}) = 180°.$$

Do đó $\widehat{COM} + \widehat{CON} = 90°$, chứng tỏ hai đường chéo MP và NQ của hình bình hành $MNPQ$ vuông góc với nhau. Vậy $MNPQ$ là hình thoi.

Chú ý. Để kết luận $MNPQ$ là hình thoi, có thể chứng minh hình bình hành $MNPQ$ có hai cạnh liên tiếp bằng nhau. Cụ thể ta có:

• $MA = MC$ (hai tiếp tuyến cắt nhau tại M);

• $\Delta CON = \Delta AOQ$ (hai tam giác vuông có $OC = OA$ và $ON = OQ$), suy ra $AQ = CN$.

Do đó $MQ = MA + AQ = MC + CN = MN$ (đpcm).

5.34. (H.5.32) a) OAB là tam giác cân (do $OA = OB$) nên $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$. Do đó $\widehat{A_1} + \widehat{B_1} + \widehat{O_1} = 2\widehat{A_1} + \widehat{O_1} = 180°$, suy ra $2\widehat{A_1} = 180° - \widehat{O_1}$. (1)

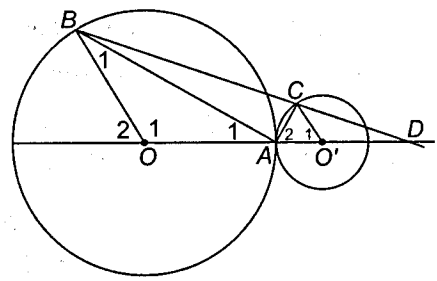
Tương tự, xét tam giác $O'AC$, ta có:

$2\widehat{A_2} = 180° - \widehat{O'_1}$. (2)

Từ (1) và (2) ta có

$2\left(\widehat{A_1} + \widehat{A_2}\right) = 360° - \left(\widehat{O_1} + \widehat{O'_1}\right)$. (3)

Mặt khác, theo đề bài ta có OB // $O'C$, suy ra $\widehat{O_2} = \widehat{O'_1}$ (hai góc đồng vị), mà $\widehat{O_2}$ kề bù với $\widehat{O_1}$ nên $\widehat{O_1}$ bù với $\widehat{O'_1}$, nghĩa là $\widehat{O_1} + \widehat{O'_1}$ = 180°. Thay kết quả này vào (3) ta được $2\left(\widehat{A_1} + \widehat{A_2}\right) = 180°$ hay $\widehat{A_1} + \widehat{A_2}$ = 90°. (4)



Hình 5.32

Từ (4) ta thu được $\widehat{BAC}$ = 180° – $\left(\widehat{A_1} + \widehat{A_2}\right)$ = 90°. Vậy $\widehat{BAC}$ = 90°.

b) Từ giả thiết R = 3 cm và R' = 1 cm, ta suy ra

$OB = OA = R = 3$ cm, $O'C = O'A = R' = 1$ cm.

Tam giác DOB có $O'C$ // OB nên $\Delta DOB \backsim \Delta DO'C$. Do đó

$$\frac{DO}{DO'} = \frac{OB}{O'C} = \frac{3}{1}. \quad (5)$$

Mặt khác, ta có $DO' = DO - OO' = DO - (OA + O'A) = DO - (3 + 1)$, suy ra

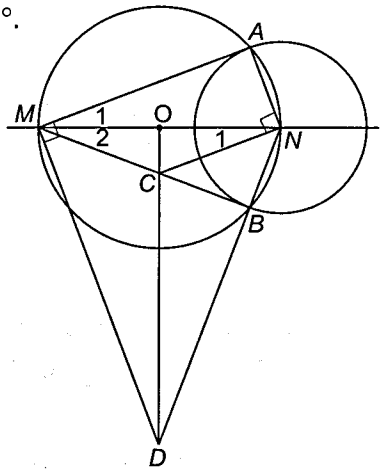
$$DO' = DO - 4. \quad (6)$$

Thay thế DO' trong (5) bởi (6), ta được $\frac{DO}{DO-4} = 3$. Từ đó suy ra:

$DO = 3(DO - 4)$ hay $2DO = 12$ (cm).

Vậy DO = 6 (cm).

5.35. (H.5.33) a) *HD:* Chứng minh $\widehat{MAN} = \widehat{MBN} = 90°$.



Hình 5.33

b) Ta có *AM // NC* (cùng vuông góc với *AN*), suy ra $\widehat{M_1} = \widehat{N_1}$. (1)

Mặt khác, *MA* và *MB* là hai tiếp tuyến cắt nhau của (*N*) nên *MN* là đường phân giác của góc *AMB*. Do đó $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{M_2} = \widehat{N_1}$, nghĩa là tam giác *CMN* cân tại *C*. Do đó, trung tuyến *CO* (do *OM* = *ON*) cũng là trung trực của *MN*.

Vậy *M* và *N* đối xứng với nhau qua *OC*.

c) Từ giả thiết *MD* ⊥ *MA*, ta có *MD // AN* (cùng vuông góc với *MA*), do đó $\widehat{DMN} = \widehat{ANM}$ (3).

Mặt khác, *MA* và *MB* là hai tiếp tuyến cắt nhau của (*N*) nên *MN* là đường phân giác của góc *ANB*. Do đó $\widehat{DNM} = \widehat{ANM}$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{DMN} = \widehat{DNM}$. Điều đó chứng tỏ *DMN* là tam giác cân tại *D*, suy ra *D* nằm trên đường trung trực *CO* của *MN*.

Vậy ba điểm *O*, *C* và *D* thẳng hàng.

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam xin trân trọng cảm ơn các tác giả có tác phẩm, tư liệu được sử dụng, trích dẫn trong cuốn sách này.

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Chủ tịch Hội đồng thành viên kiêm Tổng Giám đốc NGUYỄN TIẾN THANH

Chịu trách nhiệm nội dung:
Tổng biên tập PHẠM VĨNH THÁI

Biên tập nội dung: ĐẶNG THỊ MINH THU – VŨ THỊ VÂN
Thiết kế sách: NGUYỄN THÀNH TRUNG
Trình bày bìa: NGUYỄN BÍCH LA
Sửa bản in: PHẠM THỊ TÌNH – VŨ THỊ THANH TÂM
Chế bản: CTCP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI

Bản quyền thuộc Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

Tất cả các phần của nội dung cuốn sách này đều không được sao chép, lưu trữ, chuyển thể dưới bất kì hình thức nào khi chưa có sự cho phép bằng văn bản của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

BÀI TẬP TOÁN 9 - TẬP MỘT

Mã số: G1BH9T001H24

In 55.000 bản, (QĐ in số 05BT), khổ 17 x 24 cm.
Đơn vị in: Công ty TNHH một thành viên In Đắk Lắk
Địa chỉ: 45 Nguyễn Tất Thành, P. Tân An, TP. Buôn Ma Thuột, tỉnh Đắk Lắk
Số ĐKXB: 02-2024/CXBIPH/14-2316/GD
Số QĐXB: 149 TBT/QĐ-GD-HCM ngày 20 tháng 5 năm 2024
In xong và nộp lưu chiểu tháng 6 năm 2024.
Mã số ISBN: Tập một: 978-604-0-39149-0
Tập hai: 978-604-0-39150-6