KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

CUNG THẾ ANH – NGUYỄN HUY ĐOAN (đồng Chủ biên)
NGUYỄN CAO CƯỜNG – TRẦN MẠNH CƯỜNG
DOÃN MINH CƯỜNG – TRẦN PHƯƠNG DUNG
SĨ ĐỨC QUANG – LƯU BÁ THẮNG – ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài tập TOÁN 9

TẬP HAI



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

MỤC LỤC

NỘI DUNG	Trang	
	Đề bài	Lời giải - Hướng dẫn - Đáp số
CHƯƠNG VI. HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$). PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN	3	75
Bài 18. Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)	3	75
Bài 19. Phương trình bậc hai một ẩn	7	78
Bài 20. Định lí Viète và ứng dụng	11	80
Bài 21. Giải bài toán bằng cách lập phương trình	14	84
Ôn tập chương VI	18	88
CHƯƠNG VII. TẦN SỐ VÀ TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI	22	94
Bài 22. Bảng tần số và biểu đồ tần số	22	94
Bài 23. Bảng tần số tương đối và biểu đồ tần số tương đối	27	96
Bài 24. Bảng tần số, tần số tương đối ghép nhóm và biểu đồ	32	98
Ôn tập chương VII	38	101
CHƯƠNG VIII. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ TRONG MỘT SỐ MÔ HÌNH XÁC XUẤT ĐƠN GIẢN	42	104
Bài 25. Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu	42	104
Bài 26. Xác suất của biến cố liên quan tới phép thử	44	106
Ôn tập chương VIII	47	109
CHƯƠNG IX. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP	49	112
Bài 27. Góc nội tiếp	49	112
Bài 28. Đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp của một tam giác	51	114
Bài 29. Tứ giác nội tiếp	54	118
Bài 30. Đa giác đều	57	122
Ôn tập chương IX	61	125
CHƯƠNG X. MỘT SỐ HÌNH KHỐI TRONG THỰC TIỄN	63	130
Bài 31. Hình trụ và hình nón	63	130
Bài 32. Hình cầu	67	131
Ôn tập chương X	69	132
BÀI TẬP ÔN TẬP CUỐI NĂM	72	134

CHƯƠNG VI
HÀM SỐ $y = ax^2$ $(a \neq 0)$. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

BÀI 18 HÀM SỐ $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

2. Đồ thị của hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$ là một *parabol* đi qua gốc toạ độ $O(0; 0)$, nhận Oy là trục đối xứng và

- Nếu $a > 0$ thì đồ thị nằm phía trên trục hoành, O là điểm thấp nhất của đồ thị.
- Nếu $a < 0$ thì đồ thị nằm phía dưới trục hoành, O là điểm cao nhất của đồ thị.

Điểm O gọi là *đỉnh* của parabol.

3. Để vẽ đồ thị của hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$ ta cần xác định tối thiểu năm điểm thuộc đồ thị, bao gồm gốc toạ độ $O(0; 0)$ và hai cặp điểm đối xứng với nhau qua trục tung Oy.

B KĨ NĂNG GIẢI TOÁN

Những dạng toán cơ bản liên quan đến hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$:

- Thiết lập bảng giá trị của hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$.
- Vẽ đồ thị của hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$.
- Nhận biết tính đối xứng của đồ thị hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$.
- Giải quyết một số vấn đề thực tiễn gắn với hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$.

Ví dụ 1 (*Khai thác thông tin từ công thức của hàm số*)

Diện tích S (tính bằng feet vuông) của hình ảnh được chiếu trên màn hình phim được cho bởi công thức $S = 0{,}16d^2$, trong đó d là khoảng cách từ máy

chiếu đến màn hình (tính bằng feet). Hình ảnh được chiếu ở khoảng cách nào sẽ có diện tích 100 feet vuông?

Giải

Diện tích tính bằng feet vuông của hình ảnh được chiếu trên màn hình được cho bởi công thức $S = 0{,}16d^2$.

Để hình ảnh được chiếu ở khoảng cách d có diện tích 100 feet vuông thì:

$$100 = 0{,}16d^2 \text{ hay } d^2 = \frac{100}{0{,}16} = 625.$$

Suy ra $d = \sqrt{625} = 25$ (feet).

Vậy hình ảnh được chiếu ở khoảng cách 25 feet sẽ có diện tích 100 feet vuông.

Ví dụ 2 *(Lập công thức hàm số)*

Kích thước của màn hình ti vi hình chữ nhật được xác định bằng độ dài đường chéo. Ti vi ngày nay thường có định dạng 16 : 9, nghĩa là tỉ lệ giữa chiều dài và chiều rộng của màn hình là 16 trên 9.

a) Lập công thức tính diện tích màn hình của ti vi có độ dài đường chéo là d (inch).

b) Diện tích của màn hình ti vi 50 inch là bao nhiêu (làm tròn đến hàng đơn vị của inch vuông)?

Giải

a) Gọi x (inch) là chiều rộng của màn hình ti vi. Điều kiện: $x > 0$.

Vì màn hình có định dạng 16 : 9 nên chiều dài của màn hình ti vi là $\frac{16}{9}x$ (inch).

Theo định lí Pythagore ta có:

$$x^2 + \left(\frac{16}{9}x\right)^2 = d^2, \text{ hay } x^2 = \frac{81}{337}d^2, \text{ tức là } x = \frac{9}{\sqrt{337}}d.$$

Do đó, chiều rộng của màn hình ti vi là: $x = \frac{9}{\sqrt{337}}d$, chiều dài của màn hình ti vi là: $\frac{16}{9}x = \frac{16}{\sqrt{337}}d$.

Vậy diện tích của màn hình ti vi là

$$S = \frac{9}{\sqrt{337}}d \cdot \frac{16}{\sqrt{337}}d = \frac{144}{337}d^2 \text{ (inch}^2\text{)}.$$

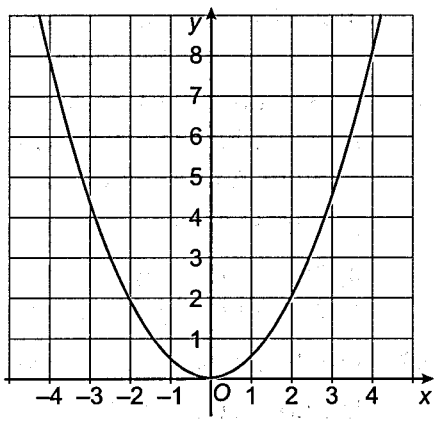
b) Với $d = 50$ inch, ta có diện tích của màn hình ti vi là

$$S = \frac{144}{337} \cdot 50^2 \approx 1\,068 \text{ (inch}^2\text{)}.$$

Vậy diện tích của màn hình ti vi 50 inch là khoảng 1 068 (inch^2).

Ví dụ 3 *(Đọc thông tin từ đồ thị)*

Biết rằng đường cong trong hình bên là một parabol $y = ax^2 (a \neq 0)$.



a) Tìm hệ số a.

b) Tìm tung độ của điểm thuộc parabol có hoành độ $x = -4$.

c) Tìm các điểm thuộc parabol có tung độ $y = 8$.

Giải

a) Để tìm hệ số a trong công thức $y = ax^2$, dựa vào hình vẽ ta lấy điểm $A(2; 2)$ thuộc đồ thị. Khi đó, ta có $2 = a \cdot 2^2$. Suy ra $a = \frac{1}{2}$.

Vậy ta có đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$.

b) Tung độ của điểm thuộc parabol có hoành độ $x = -4$ là $y = \frac{1}{2} \cdot (-4)^2 = 8$.

c) Hoành độ x của các điểm thuộc parabol có tung độ là $y = 8$ thoả mãn:

$$8 = \frac{1}{2}x^2 \text{ hay } x^2 = 16.$$

Suy ra $x = 4$ hoặc $x = -4$.

Vậy ta được hai điểm thuộc parabol có tung độ $y = 8$ là $B(4; 8)$ và $B'(-4; 8)$. Chú ý rằng hai điểm này đối xứng với nhau qua trục tung Oy.

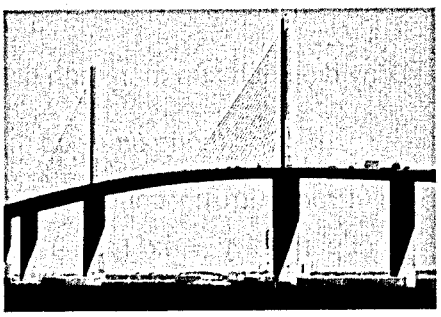
BÀI TẬP

6.1. Thể tích V của hình lăng trụ đứng tứ giác có đáy là hình vuông và chiều cao 5 cm là một hàm số của độ dài cạnh đáy a (cm).

a) Viết công thức của hàm số này và tính độ dài cạnh đáy của hình lăng trụ nếu biết thể tích bằng 180 cm^3.

b) Nếu độ dài cạnh a của hình vuông đáy tăng lên hai lần thì thể tích V của khối lăng trụ thay đổi như thế nào?

6.2. Cầu treo Sunshine Skyway bắc qua Vịnh Tampa ở bang Florida (Mỹ), được hỗ trợ bởi 21 dây cáp làm bằng thép, mỗi dây có đường kính 9 inch. Khối lượng mà mỗi dây cáp có thể chịu được là $w = 8d^2$ (tấn), trong đó d là đường kính của dây cáp (tính bằng inch) (Theo *Algebra 2, NXB McGraw-Hill, 2018*).



a) Tính khối lượng tối đa mà cây cầu treo có thể chịu đựng được.

b) Nếu muốn cây cầu treo có thể chịu được khối lượng là 15 162 tấn thì đường kính của dây cáp phải là bao nhiêu?

6.3. Lực F của gió khi thổi vuông góc vào cánh buồm tỉ lệ thuận với bình phương tốc độ v của gió, tức là $F = av^2$ (a là hằng số). Biết rằng khi tốc độ gió bằng 2 m/s thì lực tác động lên cánh buồm của một chiếc thuyền bằng 120 N.

a) Tính hằng số a.

b) Hỏi khi tốc độ gió $v = 15$ m/s thì lực thổi F của gió bằng bao nhiêu?

c) Biết rằng cánh buồm chỉ có thể chịu được một áp lực tối đa là 12 000 N, hỏi chiếc thuyền có thể đi được trong gió bão với tốc độ gió 90 km/h không?

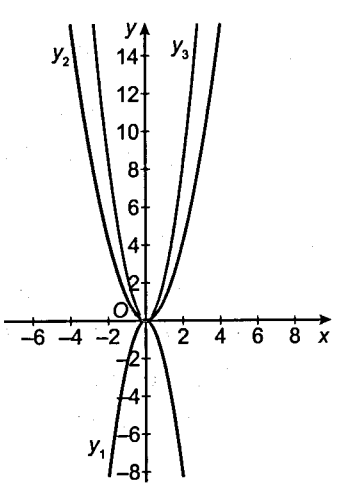
6.4. Xác định hệ số a của hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$, biết đồ thị của hàm số đi qua điểm:

a) $A\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$; b) $B\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

6.5. Trong hình bên có đồ thị của ba hàm số $y = -2x^2$, $y = x^2$, $y = 2x^2$.

a) Cho biết đường nào là đồ thị của hàm số $y = -2x^2$.

b) Trong hai đường còn lại, với mỗi x hãy so sánh hai giá trị tương ứng của y để phân biệt đồ thị hai hàm số $y = x^2$ và $y = 2x^2$.



6.6. Trên cùng một mặt phẳng toạ độ Oxy, vẽ parabol (P): $y = -x^2$ và đường thẳng (d): $y = x - 2$. Dùng đồ thị xác định toạ độ các giao điểm của hai đường này.

6.7. Vẽ đồ thị của hai hàm số sau trên cùng một mặt phẳng toạ độ:

$$y = 0{,}75x^2;\ y = -0{,}75x^2.$$

Có nhận xét gì về vị trí của hai đồ thị này so với trục hoành Ox?

6.8. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 (a \neq 0)$.

a) Chứng tỏ rằng nếu $(x_0; y_0)$ là một điểm thuộc đồ thị hàm số thì điểm $(-x_0; y_0)$ cũng nằm trên đồ thị hàm số đó.

b) Chứng minh rằng $f(-x) = f(x)$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

BÀI 19 PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình bậc hai một ẩn x là phương trình có dạng: $ax^2 + bx + c = 0$ (1), trong đó x là ẩn và a, b, c là những số cho trước gọi là hệ số, $a \neq 0$.

2. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai: Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$:

- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a};\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.
- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Chú ý. Nếu a và c trái dấu thì phương trình bậc hai (1) có hai nghiệm phân biệt.

3. Công thức nghiệm thu gọn: Với phương trình bậc hai (1), đặt $b = 2b'$, $\Delta' = b'^2 - ac$:

– Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a};\ x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}.$$

– Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$.

– Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

B KĨ NĂNG GIẢI TOÁN

Những dạng toán cơ bản thường gặp:

– Nhận biết khái niệm phương trình bậc hai một ẩn.

– Giải phương trình bậc hai một ẩn:

+ Đưa về dạng tích hoặc dùng hằng đẳng thức;

+ Sử dụng công thức nghiệm hoặc công thức nghiệm thu gọn;

+ Tìm nghiệm bằng máy tính cầm tay.

– Vận dụng phương trình bậc hai vào giải quyết một số bài toán thực tiễn: bài toán liên quan đến quãng đường, thời gian, diện tích, giá trị đại lượng công việc.

Ví dụ 1 (*Giải phương trình bậc hai*)

Cho phương trình bậc hai (ẩn x): $x^2 + 2(m+2)x + m^2 - 3 = 0$.

a) Giải phương trình với $m = -1$.

b) Tìm m để phương trình đã cho có nghiệm.

Giải

a) Với $m = -1$, ta có phương trình: $x^2 + 2x - 2 = 0$.

Ta có: $\Delta' = 1^2 - 1 \cdot (-2) = 3 > 0$.

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = -1 + \sqrt{3}$, $x_2 = -1 - \sqrt{3}$.

b) Ta có: $\Delta' = (m+2)^2 - (m^2 - 3) = 4m + 7$.

Phương trình có nghiệm khi $\Delta' \geq 0$, tức là $4m + 7 \geq 0$ hay $m \geq -\frac{7}{4}$.

Vậy với $m \geq -\frac{7}{4}$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

Ví dụ 2 (*Vận dụng thực tiễn*)

Một vật được phóng lên cao theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu 24,5 m/s. Độ cao h (mét) của vật so với mặt đất sau t giây là $h = -4,9t^2 + 24,5t$.

a) Khi nào vật sẽ ở độ cao 19,6 m so với mặt đất?

b) Khi nào vật chạm đất?

c) Vật có thể đạt tới độ cao 50 m hay không?

Giải

a) Để tìm thời điểm khi vật ở độ cao $h = 19,6$ m, ta giải phương trình:

$$-4,9t^2 + 24,5t = 19,6$$

$$4,9t^2 - 24,5t + 19,6 = 0$$

$$t^2 - 5t + 4 = 0.$$

Ta giải phương trình này để tìm t.

Tính $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 4 = 9 > 0, \sqrt{\Delta} = 3.$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt là:

$$t_1 = \frac{5-3}{2} = 1;\ t_2 = \frac{5+3}{2} = 4.$$

Vậy có hai thời điểm mà vật ở độ cao 19,6 m so với mặt đất là thời điểm $t_1 = 1$ giây (lúc vật bay lên) và thời điểm $t_2 = 4$ giây (lúc vật rơi xuống).

b) Vật chạm đất khi $h = 0$, tức là khi:

$$-4,9t^2 + 24,5t = 0$$

$$-t^2 + 5t = 0$$

$$t(5 - t) = 0.$$

Suy ra $t = 0$ hoặc $t = 5$.

Giá trị $t = 0$ ứng với thời điểm bắt đầu phóng vật lên.

Vậy vật chạm đất tại thời điểm $t = 5$ giây.

c) Nếu vật đạt độ cao 50 m thì ta có phương trình:

$$-4,9t^2 + 24,5t = 50$$

$$4,9t^2 - 24,5t + 50 = 0.$$

Ta có: $\Delta = (-24,5)^2 - 4 \cdot 4,9 \cdot 50 = -379,75 < 0.$

Do đó, phương trình trên vô nghiệm.

Vậy vật không thể đạt độ cao 50 m.

BÀI TẬP

6.9. Giải các phương trình sau bằng cách đưa về dạng tích:

a) $x^2 + 5x = 0$;

b) $x^2 - 16 = 0$;

c) $x^2 - 10x + 25 = 0$;

d) $x^2 + 8x + 12 = 0$.

6.10. Giải các phương trình sau:

a) $(2x + 1)^2 = 3$;

b) $(2 - 3x)^2 = 5$.

6.11. Sử dụng công thức nghiệm hoặc công thức nghiệm thu gọn, giải các phương trình bậc hai sau:

a) $x^2 + 2x - 5 = 0$; b) $4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 = 0$; c) $x^2 - 6\sqrt{5}x + 7 = 0$.

6.12. Sử dụng máy tính cầm tay, tìm nghiệm của các phương trình sau:

a) $2x^2 + \sqrt{11}x - 1 = 0$; b) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{50}{9} = 0$; c) $\sqrt{2}x^2 - (1 + \sqrt{5})x + 11 = 0$.

6.13. Tuỳ theo các giá trị của m, hãy giải phương trình ẩn x sau: $(2x - 1)^2 = m$.

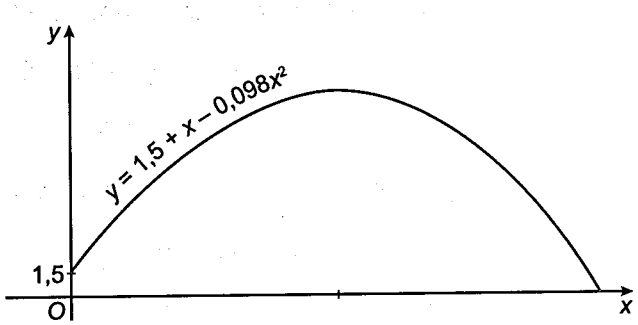
6.14. Cho phương trình (ẩn x): $x^2 + 4(m + 1)x + 4m^2 - 3 = 0$.

a) Tính biệt thức Δ'.

b) Tìm điều kiện của m để phương trình:

- Có hai nghiệm phân biệt;
- Có nghiệm kép;
- Vô nghiệm.

6.15. Quỹ đạo chuyển động của một quả bóng được cho bởi công thức $y = 1{,}5 + x - 0{,}098x^2$, trong đó y (mét) là độ cao của quả bóng so với mặt đất và x (mét) là khoảng cách theo phương ngang từ vị trí của quả bóng đến vị trí ném (xem hình bên). Tính khoảng cách theo phương ngang từ vị trí ném bóng đến vị trí quả bóng chạm đất.



6.16. Công ty sản xuất ván gỗ cần ước tính chiều dài tấm ván (tính bằng feet) có thể tạo ra được từ một khúc gỗ. Một trong những công thức được sử dụng phổ biến để ước tính chiều dài tấm ván là *công thức Doyle*:

$$B = \frac{L}{16}\left(D^2 - 8D + 16\right),$$

trong đó B là chiều dài tấm ván (feet), D là đường kính (inch) và L là chiều dài của khúc gỗ (feet).

a) Viết lại công thức Doyle cho các khúc gỗ dài 16 feet.

b) Tìm các nghiệm của phương trình bậc hai ẩn D sau: $D^2 - 8D + 16 = 0$.

BÀI 20 ĐỊNH LÍ VIÈTE VÀ ỨNG DỤNG

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định lí Viète: Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình bậc hai

$$ax^2 + bx + c = 0 \ (1) \text{ thì } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

2. Cách nhẩm nghiệm của phương trình bậc hai (1):

- Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = 1$ và nghiệm còn lại là $x_2 = \dfrac{c}{a}$.
- Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = -1$ và nghiệm còn lại là $x_2 = -\dfrac{c}{a}$.

3. Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình bậc hai

$$X^2 - SX + P = 0.$$

Điều kiện để phương trình bậc hai này có nghiệm là $S^2 - 4P \geq 0$.

B KĨ NĂNG GIẢI TOÁN

Những dạng toán cơ bản thường gặp:

- Vận dụng định lí Viète để tính giá trị của một biểu thức đối xứng chứa hai nghiệm của một phương trình bậc hai.
- Vận dụng định lí Viète để tính nhẩm nghiệm của phương trình bậc hai.
- Vận dụng định lí Viète để tìm hai số khi biết tổng và tích của chúng.
- Vận dụng định lí Viète để phân tích đa thức bậc hai thành nhân tử.

Ví dụ 1 *(Tính giá trị biểu thức đối xứng chứa hai nghiệm của một phương trình bậc hai)*

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 13x + 11 = 0$.

Không giải phương trình, hãy tính:

a) $x_1^2 + x_2^2$; b) $x_1^3 + x_2^3$; c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; d) $|x_1 - x_2|$.

Giải

Ta có: $\Delta = (-13)^2 - 4 \cdot 11 = 125 > 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

Theo định lí Viète, ta có: $x_1 + x_2 = 13$, $x_1x_2 = 11$.

Do đó:

a) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 13^2 - 2 \cdot 11 = 147$.

b) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)\left[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2\right]$

$= 13 \cdot (13^2 - 3 \cdot 11) = 1\,768$.

c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1x_2} = \frac{13}{11}$.

d) $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2}$

$= \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{13^2 - 4 \cdot 11} = 5\sqrt{5}$.

Ví dụ 2 *(Tìm hai số khi biết tổng và tích của chúng)*

Giả sử u và v là hai số thoả mãn: $u + v = 6$, $uv = m + 2$.

a) Tìm hai số u và v khi $m = -18$.

b) Tìm điều kiện của m để có hai số u và v thoả mãn điều kiện đề bài.

Giải

Ta có u và v là hai nghiệm của phương trình bậc hai: $X^2 - 6X + (m+2) = 0$ (1).

a) Khi $m = -18$, phương trình (1) trở thành: $X^2 - 6X - 16 = 0$.

Ta có: $\Delta' = (-3)^2 - 1 \cdot (-16) = 25$, $\sqrt{\Delta'} = 5$.

Phương trình có hai nghiệm: $X_1 = 3 - 5 = -2$; $X_2 = 3 + 5 = 8$.

Vậy có hai cặp số $(u;v)$ thoả mãn là $(-2;8)$ và $(8;-2)$.

b) Điều kiện để có hai số u và v thoả mãn điều kiện của đề bài là phương trình bậc hai (1) có nghiệm, tức là

$$\Delta' = (-3)^2 - (m+2) = 7 - m \geq 0, \text{ tức là } m \leq 7.$$

BÀI TẬP

6.17. Tính nhẩm nghiệm của các phương trình sau:

a) $\sqrt{3}x^2 - (\sqrt{3}+1)x + 1 = 0$;

b) $3x^2 + (\sqrt{5}-1)x - 4 + \sqrt{5} = 0$;

c) $2x^2 - 3\sqrt{5}x + 5 = 0$, biết rằng phương trình có một nghiệm là $x = \sqrt{5}$.

6.18. Tìm hai số u và v, biết:

a) $u + v = 17, uv = 72$; b) $u^2 + v^2 = 73, uv = 24$.

6.19. Dùng định lí Viète, tính nhẩm nghiệm của các phương trình sau:

a) $x^2 - 8x + 15 = 0$; b) $x^2 + 5x + 6 = 0$.

6.20. Cho phương trình bậc hai (ẩn x): $x^2 - 4x + m - 2 = 0$.

a) Tìm điều kiện của m để phương trình có nghiệm.

b) Với các giá trị m tìm được ở câu a, gọi x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình. Hãy tính giá trị của các biểu thức sau theo m:

$$A = x_1^2 + x_2^2; B = x_1^3 + x_2^3.$$

6.21. Giả sử phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có hai nghiệm là x_1, x_2 đều khác 0. Hãy lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\frac{1}{x_1}$ và $\frac{1}{x_2}$.

6.22. Chứng tỏ rằng nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 thì đa thức $ax^2 + bx + c$ có thể phân tích được thành nhân tử như sau:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Áp dụng: Hãy phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$$2x^2 - 9x + 7;\ 4x^2 + (\sqrt{2} - 3)x - 7 + \sqrt{2}.$$

6.23. Tìm m để phương trình $x^2 + 4x + m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

6.24. Bác Long có 48 mét lưới thép. Bác muốn dùng để rào xung quanh một mảnh đất trống (đủ rộng) thành một mảnh vườn hình chữ nhật để trồng rau.

a) Biết diện tích của mảnh vườn là 108 m^2, hãy tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn.

b) Hỏi diện tích lớn nhất của mảnh vườn mà bác Long có thể rào được là bao nhiêu mét vuông?

BÀI 21 GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Các bước giải bài toán bằng cách lập phương trình:

Bước 1. Lập phương trình:

- Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn số.
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết.
- Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2. Giải phương trình.

Bước 3. Trả lời: Kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thoả mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không, rồi thoả mãn điều kiện của phương trình không và kết luận.

(B) KĨ NĂNG GIẢI TOÁN

Một số dạng toán thực tế thường gặp đưa được về giải phương trình bậc hai hoặc phương trình có ẩn ở mẫu quy được về phương trình bậc hai:

- Bài toán liên quan đến diện tích của hình chữ nhật (khi biết quan hệ giữa chiều dài và chiều rộng,...);
- Bài toán về lãi suất tiết kiệm (khi tính theo thể thức lãi kép, gửi hai kì liên tiếp);
- Bài toán về chuyển động;
- Bài toán về năng suất lao động;
- Bài toán về pha trộn hai chất hoặc hai dung dịch.

Ví dụ 1 *(Bài toán gửi tiết kiệm)*

Bác Hương gửi tiết kiệm 100 000 000 đồng ở một ngân hàng theo thể thức tính lãi kép kì hạn 12 tháng. Sau hai năm bác nhận được tổng số tiền (cả gốc lẫn lãi) là 112 360 000 đồng. Tính lãi suất năm của khoản gửi tiết kiệm này, biết rằng lãi suất không đổi trong cả quá trình gửi tiết kiệm.

Giải

Gọi r là lãi suất năm của khoản gửi tiết kiệm này (giả sử r cho dưới dạng số thập phân). Điều kiện: $r > 0$.

Khi gửi 100 000 000 đồng với lãi suất năm là r, thì sau năm thứ nhất số tiền bác Hương thu được là:

$$A_1 = 100\,000\,000 + 100\,000\,000r = 100\,000\,000 \cdot (1 + r) \text{ (đồng).}$$

Nếu hết năm thứ nhất, không rút tiền ra mà tiếp tục gửi tiết kiệm, thì tổng số tiền bác Hương thu được sau năm thứ hai là:

$$A_2 = A_1 + rA_1 = 100\,000\,000 \cdot (1 + r) + r \cdot 100\,000\,000 \cdot (1 + r)$$

$$= 100\,000\,000 \cdot (1 + r)^2 \text{ (đồng).}$$

Sau hai năm, tổng số tiền bác Hương nhận được là 112 360 000 đồng nên ta có phương trình:

$$112\,360\,000 = 100\,000\,000 \cdot (1 + r)^2.$$

Suy ra $1 + r = \sqrt{\dfrac{112\,360\,000}{100\,000\,000}} = \sqrt{1{,}1236} = 1{,}06.$

Do đó: $r = 0{,}06 = 6\%$.

Vậy lãi suất năm của khoản gửi tiết kiệm của bác Hương là 6%.

Ví dụ 2 *(Bài toán về chuyển động)*

Khoảng cách giữa hai thành phố Hà Nội và Hạ Long là khoảng 156 km. Ô tô thứ nhất khởi hành từ Hà Nội đến Hạ Long với vận tốc không đổi. Sau đó 24 phút, ô tô thứ hai cũng khởi hành từ Hà Nội đến Hạ Long (trên cùng tuyến đường với ô tô thứ nhất) với vận tốc lớn hơn vận tốc của ô tô thứ nhất là 8 km/h. Biết rằng cả hai ô tô đều đến Hạ Long cùng một lúc. Tính vận tốc của mỗi ô tô.

Giải

Đổi: 24 phút = $\frac{2}{5}$ giờ.

Gọi vận tốc của ô tô thứ nhất là v (km/h). Điều kiện: $v > 0$.

Khi đó, vận tốc của ô tô thứ hai là $(v + 8)$ (km/h).

Khoảng cách giữa hai thành phố là 156 km nên:

+ Thời gian đi của ô tô thứ nhất là $\frac{156}{v}$ (giờ).

+ Thời gian đi của ô tô thứ hai là $\frac{156}{v+8}$ (giờ).

Theo đề bài, ô tô thứ hai khởi hành sau ô tô thứ nhất $\frac{2}{5}$ giờ và cả hai ô tô đều đến Hạ Long cùng một lúc, nên ta có phương trình:

$$\frac{156}{v} = \frac{156}{v+8} + \frac{2}{5}.$$

Nhân cả hai vế của phương trình với $5v(v + 8)$ để khử mẫu, ta được phương trình bậc hai:

$$780(v + 8) = 780v + 2v(v + 8)$$

$$v^2 + 8v - 3120 = 0.$$

Ta có: $\Delta' = 4^2 + 3120 = 3136$, $\sqrt{\Delta'} = 56$.

Phương trình bậc hai này có hai nghiệm:

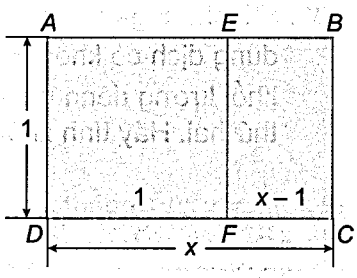
$v = -4 + 56 = 52$ (thoả mãn điều kiện) và $v = -4 - 56 = -60 < 0$ (loại vì không thoả mãn điều kiện).

Vậy vận tốc của ô tô thứ nhất là $v = 52$ (km/h) và vận tốc của ô tô thứ hai là $v + 8 = 60$ (km/h).

BÀI TẬP

6.25. Một bức ảnh hình chữ nhật có chiều rộng 8 cm và chiều dài 12 cm. Bức ảnh được phóng to bằng cách tăng chiều dài và chiều rộng thêm một đoạn bằng nhau để tăng gấp đôi diện tích của bức ảnh. Tìm kích thước của bức ảnh mới.

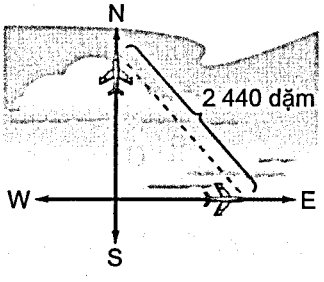
6.26. *Hình chữ nhật vàng* là hình chữ nhật có thể chia thành một hình vuông và hình chữ nhật thứ hai có các kích thước tỉ lệ với các kích thước tương ứng của hình chữ nhật ban đầu (với cùng hệ số tỉ lệ). Tỉ số x giữa chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật vàng được gọi là *tỉ lệ vàng*.



a) Tìm tỉ số giữa chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật $ABCD$ và hình chữ nhật $EBCF$.

b) Tìm giá trị chính xác của tỉ lệ vàng bằng cách đặt hai tỉ số ở câu a bằng nhau rồi tìm x.

6.27. Hai chiếc máy bay khởi hành đồng thời từ một sân bay, một chiếc bay theo hướng bắc và chiếc kia bay theo hướng đông (xem hình bên). Chiếc máy bay đi về hướng bắc đang bay nhanh hơn 50 dặm một giờ so với chiếc máy bay đi về hướng đông. Sau 3 giờ, hai máy bay cách nhau 2 440 dặm. Tìm vận tốc của mỗi máy bay.



6.28. Một phòng họp lúc đầu có một số dãy ghế với tổng cộng 40 chỗ ngồi. Do phải sắp xếp 55 chỗ ngồi cho một cuộc họp nên người ta kê thêm một dãy ghế và mỗi dãy ghế xếp thêm một chỗ ngồi. Hỏi lúc đầu có mấy dãy ghế trong phòng họp đó?

6.29. Hai anh em Hùng và Nam được mẹ giao nhiệm vụ dọn nhà. Nếu cả hai anh em cùng làm thì mất $2\frac{2}{5}$ giờ để dọn xong nhà. Nếu làm một mình thì tổng cộng thời gian của cả hai anh em để dọn xong là 10 giờ. Hỏi mỗi người cần bao nhiêu thời gian để dọn xong nhà khi làm một mình? (Biết rằng Hùng làm nhanh hơn Nam).

6.30. Một cái hộp không có nắp được làm từ mảnh bìa hình chữ nhật có kích thước $30\text{ cm} \times 40\text{ cm}$ bằng cách cắt ở bốn góc của mảnh bìa bốn hình

vuông bằng nhau. Diện tích phần đáy hộp là 336 cm^2. Tính độ dài mỗi cạnh hình vuông cắt ra ở bốn góc.

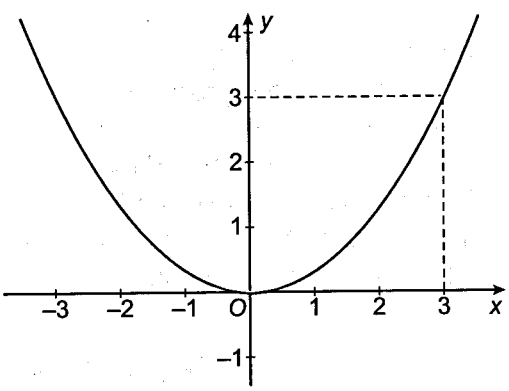
6.31. Một người đi xe máy từ tỉnh A đến tỉnh B. Sau đó 16 phút có một ô tô đi từ B về A với vận tốc lớn hơn vận tốc của xe máy là 15 km/h. Xe máy gặp ô tô ở một địa điểm cách B 24 km. Tính vận tốc của ô tô, biết rằng quãng đường AB dài 54 km.

6.32. Khi pha 8 gam chất lỏng thứ nhất với 6 gam chất lỏng thứ hai thì được một dung dịch có khối lượng riêng là 0,7 g/cm^3. Biết rằng chất lỏng thứ nhất có khối lượng riêng nặng hơn 0,2 g/cm^3 so với khối lượng riêng của chất lỏng thứ hai. Hãy tính khối lượng riêng của mỗi chất lỏng ban đầu.

ÔN TẬP CHƯƠNG VI

(A) CÂU HỎI (Trắc nghiệm)

1. Hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số nào?



A. $y = x^2$. B. $y = -\frac{1}{2}x^2$. C. $y = \frac{1}{4}x^2$. D. $y = \frac{1}{3}x^2$.

2. Cho hàm số $y = -\frac{2}{5}x^2$ có đồ thị là parabol (P). Điểm trên (P) khác gốc toạ độ $O(0; 0)$ có tung độ gấp ba lần hoành độ thì có hoành độ là

A. $-\frac{15}{2}$. B. $\frac{15}{2}$. C. $\frac{2}{15}$. D. $-\frac{2}{15}$.

3. Trong các điểm $A(1; -2)$, $B(-1; -1)$, $C(10; -200)$, $D(\sqrt{10}; -20)$, có bao nhiêu điểm thuộc đồ thị của hàm số $y = -2x^2$?

A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

4. Toạ độ một giao điểm của parabol (P): $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng (d): $y = x + \frac{3}{2}$ là

A. $\left(1; \frac{1}{2}\right)$. B. $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$. C. $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$. D. $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

5. Để điểm $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}; m\sqrt{5}\right)$ nằm trên parabol $y = -\sqrt{5}x^2$ thì giá trị của m bằng

A. $m = -\frac{5}{2}$. B. $m = \frac{2}{5}$. C. $m = -\frac{2}{5}$. D. $m = \frac{5}{2}$.

6. Cho parabol (P): $y = \left(m - \frac{3}{4}\right)x^2$, với $m \neq \frac{3}{4}$ và đường thẳng (d): $y = 3x - 5$. Biết đường thẳng d cắt (P) tại một điểm có tung độ $y = 1$. Tìm m và hoành độ giao điểm còn lại của d và (P).

A. $m = 0; x = 2$. B. $m = 1; x = 2$.

C. $m = 1; x = 10$. D. $m = \frac{5}{4}; x = 10$.

7. Không giải phương trình, hãy tính tổng hai nghiệm của phương trình $-3x^2 + 5x + 1 = 0$.

A. $-\frac{5}{6}$. B. $\frac{5}{3}$. C. $-\frac{5}{3}$. D. $\frac{5}{6}$.

8. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $-x^2 - 4x + 6 = 0$. Không giải phương trình, tính giá trị của biểu thức $M = \frac{1}{x_1 + 2} + \frac{1}{x_2 + 2}$.

A. $M = 0$. B. $M = 1$. C. $M = 4$. D. $M = -2$.

9. Tìm điều kiện của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m-2)x + m^2 - 3m + 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $m \leq -1$. B. $m = -1$.

C. $m > -1$. D. $m < -1$.

10. Nếu hai số u, v có tổng là 7 và tích là -8 thì chúng là hai nghiệm của phương trình nào?

A. $x^2 + 7x - 8 = 0$. B. $x^2 - 7x - 8 = 0$.

C. $x^2 + 7x + 8 = 0$. D. $x^2 - 7x + 8 = 0$.

B TỰ LUẬN

6.33. Cho hai hàm số: $y = -\frac{3}{2}x^2$ và $y = x^2$.

a) Vẽ đồ thị của hai hàm số này trên cùng một mặt phẳng toạ độ.

b) Tìm điểm A nằm trên đồ thị của hàm số $y = -\frac{3}{2}x^2$ và điểm B nằm trên đồ thị của hàm số $y = x^2$, biết rằng chúng đều có hoành độ là $x = \frac{3}{2}$.

c) Gọi A', B' lần lượt là các điểm đối xứng của A, B qua trục tung Oy. Tìm toạ độ của A', B' và chứng minh hai điểm này tương ứng nằm trên hai đồ thị của hàm số đi qua A, B.

6.34. Cho phương trình: $(m+1)x^2 - 3x + 1 = 0$.

a) Giải phương trình với $m = 1$.

b) Tìm điều kiện của m để phương trình đã cho là phương trình bậc hai.

c) Tìm điều kiện của m để phương trình đã cho:

– Có hai nghiệm phân biệt;

– Có nghiệm kép;

– Vô nghiệm.

6.35. Tìm hai số u và v, biết:

a) $u - v = 2, uv = 255$;

b) $u^2 + v^2 = 346, uv = 165$.

6.36. Phương trình cầu đối với một sản phẩm là $p = 60 - 0{,}0004x$, trong đó p là giá tiền của mỗi sản phẩm (USD) và x là số lượng sản phẩm đã bán. Tổng doanh thu cho việc bán x sản phẩm này là:

$$R(x) = xp = x(60 - 0{,}0004x).$$

Hỏi phải bán bao nhiêu sản phẩm để doanh thu đạt được là 220 000 USD?

6.37. Độ cao $h(t)$ (feet) của một vật sau t giây kể từ khi nó được phóng thẳng đứng lên trên từ mặt đất với vận tốc ban đầu là 85 feet/giây được cho bởi công thức $h(t) = -16t^2 + 85t$.

a) Khi nào thì vật ở độ cao 50 feet?

b) Vật có bao giờ đạt đến độ cao 120 feet không? Giải thích lí do.

6.38. Công thức tính huyết áp tâm thu bình thường (kí hiệu là P) của một người đàn ông ở độ tuổi A, được đo bằng mmHg, được đưa ra như sau:

$$P = 0{,}006A^2 - 0{,}02A + 120$$

(Theo *Algebra and Trigonometry, Pearson Education Limited, 2014*).

Tìm tuổi (làm tròn đến năm gần nhất) của người đàn ông có huyết áp bình thường là 125 mmHg.

6.39. Trong một giải cờ vua thi đấu vòng tròn tính điểm, mỗi người chơi đấu với một người chơi khác đúng một lần. Công thức $N = \dfrac{x^2 - x}{2}$ dùng để tính số ván cờ N phải chơi theo thể thức thi đấu vòng tròn một lượt khi có x người chơi.

a) Nếu một giải đấu có 10 người chơi thì có tất cả bao nhiêu ván cờ?

b) Trong một giải cờ vua thi đấu vòng tròn có tất cả 36 ván cờ, hỏi có bao nhiêu người chơi đã tham gia giải đấu?

6.40. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể nước cạn, sau $4\dfrac{4}{5}$ giờ thì đầy bể. Nếu lúc đầu để vòi thứ nhất chảy riêng và 9 giờ sau mở thêm vòi thứ hai thì sau $\dfrac{6}{5}$ giờ nữa mới đầy bể. Hỏi mỗi vòi chảy riêng thì sau bao lâu sẽ đầy bể?

CHƯƠNG VII

TẦN SỐ VÀ TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI

BÀI 22 BẢNG TẦN SỐ VÀ BIỂU ĐỒ TẦN SỐ

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Tần số của một giá trị là số lần xuất hiện giá trị đó trong dãy dữ liệu. Bảng tần số là bảng thống kê cho biết tần số của các giá trị trong dãy dữ liệu. Bảng tần số có dạng sau:

Giá trị	x_1	x_2	...	x_k
Tần số	m_1	m_2	...	m_k

trong đó, m_1 là tần số của x_1, m_2 là tần số của x_2, ..., m_k là tần số của x_k. Lưu ý rằng trong bảng này ta chỉ liệt kê các giá trị x_i khác nhau. Các giá trị x_i này có thể không phải là số.

2. Biểu đồ biểu diễn bảng tần số được gọi là biểu đồ tần số. Biểu đồ tần số thường gặp là biểu đồ tần số dạng cột và biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng (còn được gọi là đa giác tần số – frequency polygon). Biểu đồ tần số dạng cột là biểu đồ cột với trục đứng biểu diễn tần số.

– Để vẽ biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Vẽ trục ngang để biểu diễn các giá trị trong dãy dữ liệu, vẽ trục đứng thể hiện tần số.

Bước 2. Với mỗi giá trị trên trục ngang và tần số tương ứng ta xác định một điểm. Nối các điểm liên tiếp với nhau.

Bước 3. Ghi chú giải cho các trục, các điểm và tiêu đề của biểu đồ.

B KĨ NĂNG GIẢI TOÁN

– Thiết lập được bảng tần số từ dãy dữ liệu dạng liệt kê, từ biểu đồ.

– Đọc và giải thích được bảng tần số cho sẵn gắn với tình huống thực tế.

– Vẽ được biểu đồ tần số dạng cột hoặc biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng để biểu diễn bảng tần số.

Ví dụ 1 Một công ty đã ghi lại nhóm máu của các thành viên trong công ty để chuẩn bị cho đợt hiến máu tình nguyện cho kết quả như sau:

O, A, B, AB, O, O, A, O, B, A, B, B, O, O, B,

B, O, B, O, O, O, B, A, B, O, O, O, B, O, B.

a) Có bao nhiêu nhóm máu? Đếm số thành viên trong công ty theo từng nhóm máu.

b) Lập bảng tần số cho dãy dữ liệu trên. Từ bảng tần số, hãy cho biết nhóm máu nào phổ biến nhất.

Giải

a) Có 4 nhóm máu là A, B, O, AB. Trong số 30 thành viên của công ty có 14 người có nhóm máu O, 4 người có nhóm máu A, 11 người có nhóm máu B, 1 người có nhóm máu AB.

b) Bảng tần số:

Nhóm máu	A	B	O	AB
Tần số	4	11	14	1

Từ bảng tần số trên, ta thấy nhóm máu O là phổ biến nhất.

Ví dụ 2 Bảng tần số sau cho biết mức độ ùn tắc giao thông theo các mức (Mức 1: lưu thông bình thường; Mức 2: lưu thông khó khăn; Mức 3: lưu thông không ổn định; Mức 4: ùn tắc nghiêm trọng) vào lúc 17 giờ các ngày trong tháng Chín tại một đoạn quốc lộ:

Mức độ	Mức 1	Mức 2	Mức 3	Mức 4
Tần số	5	15	7	3

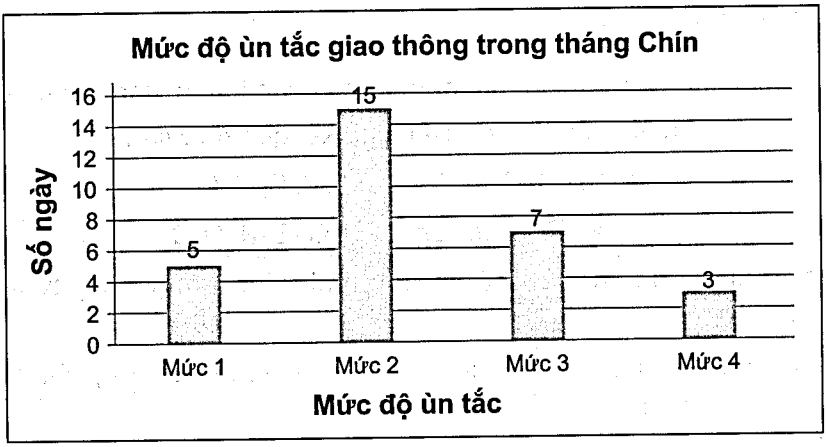
a) Dựa vào bảng tần số, hãy cho biết mức độ ùn tắc giao thông nào là phổ biến nhất vào lúc 17 giờ tại đoạn quốc lộ trên.

b) Vẽ biểu đồ tần số dạng cột biểu diễn bảng tần số trên.

Giải

a) Mức 2 là mức độ ùn tắc giao thông phổ biến nhất vào lúc 17 giờ tại đoạn quốc lộ trên vì nó tương ứng với tần số lớn nhất.

b) Biểu đồ tần số dạng cột:



BÀI TẬP

7.1. Tính đến hết SEA Games 32 đã có năm quốc gia từng lên ngôi vô địch bóng đá nam SEA Games, cụ thể như sau:

Đội tuyển	Năm vô địch
Thái Lan	1975, 1981, 1983, 1985, 1993, 1995, 1997, 1999, 2001, 2003, 2005, 2007, 2013, 2015, 2017
Malaysia	1961, 1977, 1979, 1989, 2009, 2011
Myanmar	1965, 1967, 1969, 1971, 1973
Việt Nam	1959, 2019, 2021
Indonesia	1987, 1991, 2023

(Theo *sportingnews.com*)

a) Lập bảng tần số biểu diễn số lần vô địch môn bóng đá nam SEA Games của các quốc gia trên.

b) Từ bảng tần số thu được ở câu a, hãy cho biết quốc gia nào vô địch môn Bóng đá nam SEA Games nhiều nhất, với mấy lần vô địch.

7.2. Giáo viên dạy Toán ghi lại số bài tập mỗi học sinh trong lớp đã làm sau bài học tuần trước cho kết quả như sau:

4, 2, 0, 5, 4, 3, 2, 1, 3, 3, 6, 1, 3, 2, 4, 3, 5, 3

3, 1, 4, 6, 1, 2, 3, 5, 3, 2, 4, 3, 1, 4, 4, 5, 6, 2.

a) Lập bảng tần số cho dãy số liệu trên.

b) Có bao nhiêu bạn trong lớp làm ít nhất ba bài tập?

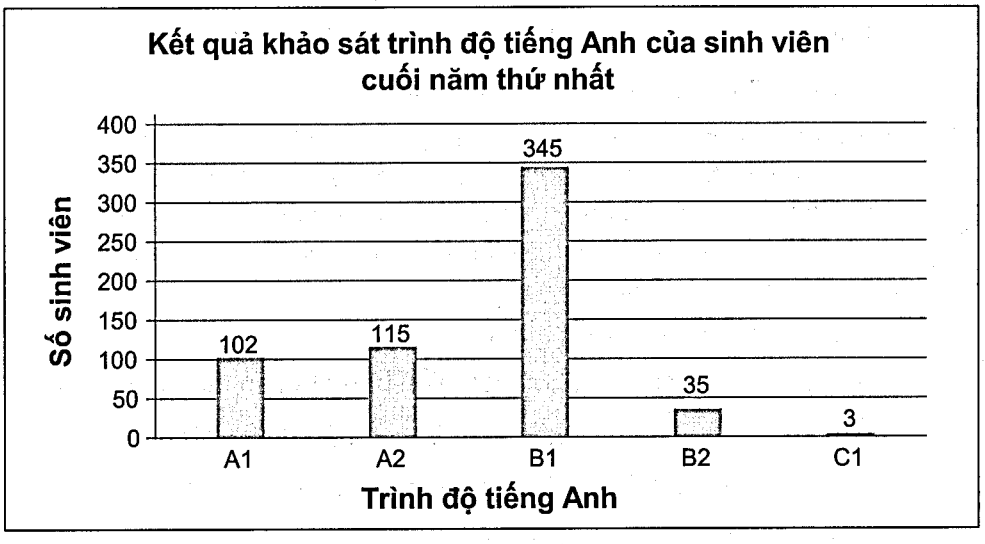
7.3. Bảng sau cho biết kết quả bình chọn môn thể thao được yêu thích nhất của các bạn học sinh lớp 9A (mỗi gạch biểu diễn cho một bạn bình chọn):

Bóng đá	𝍸 𝍸 ||||
Cầu lông	𝍸 |||
Bóng bàn	||||
Môn khác	𝍸 ||

a) Lập bảng tần số cho kết quả bình chọn trên.

b) Dựa vào bảng tần số thu được ở câu a, cho biết môn thể thao nào được các bạn yêu thích nhất.

7.4. Biểu đồ sau cho biết kết quả khảo sát trình độ tiếng Anh của sinh viên cuối năm thứ nhất ở một trường đại học:



a) Đọc và giải thích số liệu được biểu diễn trên hai cột bất kì của biểu đồ.

b) Lập bảng tần số cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

c) Để tốt nghiệp đại học, sinh viên cần có trình độ tiếng Anh ở mức B1 trở lên. Ước lượng tỉ lệ sinh viên cuối năm thứ nhất đã đạt chuẩn trình độ tiếng Anh.

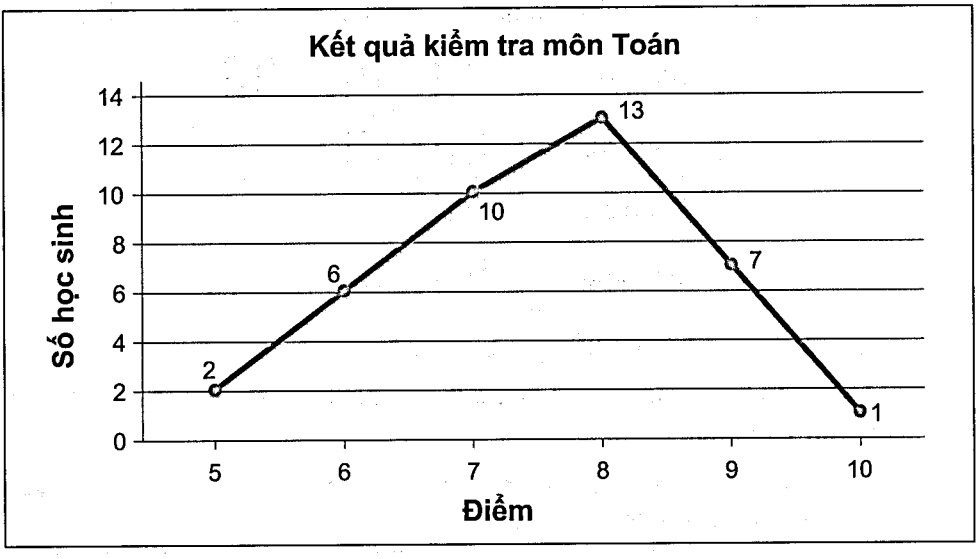
7.5. Số π với 50 chữ số sau dấu phẩy thập phân như sau:

3,141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 884 197 169 399 375 10.

a) Lập bảng tần số cho các chữ số từ 0 đến 9 xuất hiện sau dấu phẩy thập phân.

b) Chữ số nào xuất hiện nhiều nhất, ít nhất?

7.6. Cho biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng sau:



a) Lập bảng tần số cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

b) Điểm nào có nhiều học sinh đạt nhất?

7.7. Một túi chứa một số viên bi có cùng kích thước, mỗi viên bi có một trong các màu đen, trắng, đỏ, vàng. Thực hiện lấy bi 20 lần, mỗi lần lấy một viên xem viên bi có màu gì sau đó trả bi lại túi, trộn đều. Kết quả trong 20 lần lấy bi có 8 lần lấy được bi đen, 4 lần lấy được bi đỏ, 6 lần lấy được bi trắng, 2 lần lấy được bi vàng.

a) Lập bảng tần số cho kết quả thu được.

b) Vẽ biểu đồ tần số dạng cột biểu diễn bảng tần số thu được ở câu a.

7.8. Thống kê số ngày nằm viện của 20 bệnh nhân được kết quả như sau:

5, 7, 4, 6, 8, 10, 6, 7, 8, 8, 6, 5, 8, 5, 4, 6, 5, 7, 4, 6.

a) Lập bảng tần số cho dãy số liệu trên.

b) Vẽ biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng biểu diễn bảng tần số thu được ở câu a.

BÀI 23 BẢNG TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI VÀ BIỂU ĐỒ TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Cho dãy dữ liệu $x_1, x_2,..., x_n$. Tần số tương đối của giá trị x_i là tỉ số giữa tần số của x_i (gọi là m_i) với n. Bảng sau đây được gọi là bảng tần số tương đối:

Giá trị	x_1	x_2	...	x_k
Tần số tương đối	f_1	f_2	...	f_k

trong đó $f_1 = \frac{m_1}{n} \cdot 100\%,..., f_k = \frac{m_k}{n} \cdot 100\%$ lần lượt là tần số tương đối của $x_1,..., x_k$. Tần số tương đối còn được gọi là tần suất. Lưu ý, $n = m_1 +... + m_k$.

2. Biểu đồ biểu diễn bảng tần số tương đối được gọi là biểu đồ tần số tương đối. Dạng hay gặp của biểu đồ tần số tương đối là biểu đồ cột và biểu đồ hình quạt tròn.

– Để vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối trên ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Xác định số đo cung tương ứng của các hình quạt dùng để biểu diễn các tần số tương đối của các giá trị theo công thức $360^o \cdot f_i$ với $i = 1,..., k$.

Bước 2. Vẽ hình tròn và chia hình tròn thành các hình quạt có số đo cung tương ứng được xác định trong Bước 1.

Bước 3. Định dạng các hình quạt tròn (thường bằng cách tô màu), ghi tần số tương đối, chú giải và tiêu đề.

B KĨ NĂNG GIẢI TOÁN

– Thiết lập được bảng tần số tương đối từ dãy dữ liệu dạng liệt kê, từ biểu đồ, từ bảng tần số.

– Đọc và giải thích được bảng tần số tương đối, biểu đồ tần số tương đối cho sẵn gắn với tình huống thực tế.

– Vẽ được biểu đồ cột hoặc biểu đồ hình quạt tròn để biểu diễn bảng tần số tương đối.

Ví dụ 1 Bảng sau cho biết kết quả khảo sát về hoạt động được yêu thích nhất trong kì nghỉ hè của học sinh khối lớp 9:

Hoạt động	Thể thao	Nghệ thuật	Du lịch	Khác
Số bạn bình chọn	80	50	30	40

Lập bảng tần số tương đối và vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối thu được.

Giải

Tổng số học sinh bình chọn là $n = 80 + 50 + 30 + 40 = 200$.

Tỉ lệ bình chọn cho mỗi hoạt động là:

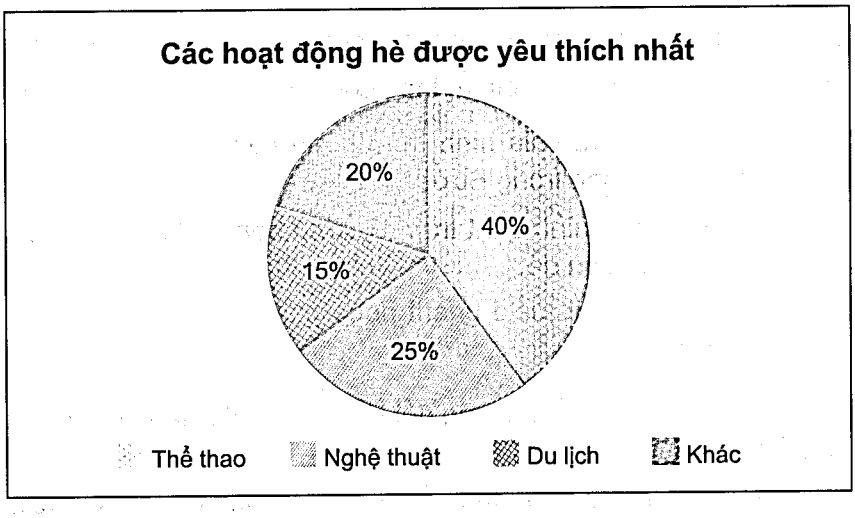
Thể thao: $\frac{80}{200} \cdot 100\% = 40\%$; Nghệ thuật: $\frac{50}{200} \cdot 100\% = 25\%$;

Du lịch: $\frac{30}{200} \cdot 100\% = 15\%$; Khác: $\frac{40}{200} \cdot 100\% = 20\%$.

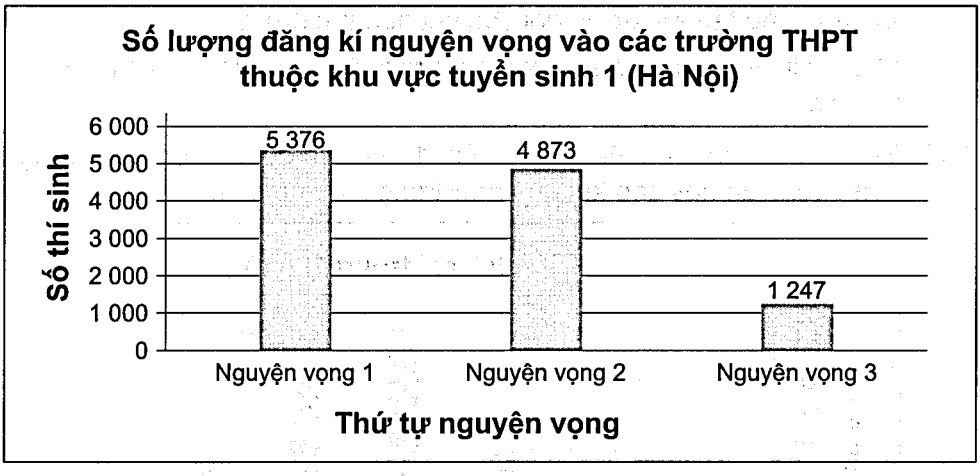
Bảng tần số tương đối:

Hoạt động	Thể thao	Nghệ thuật	Du lịch	Khác
Tần số tương đối	40%	25%	15%	20%

Biểu đồ hình quạt tròn:



Ví dụ 2 Biểu đồ dưới đây cho biết số lượng thí sinh đăng kí dự tuyển vào lớp 10 năm 2023 tại khu vực tuyển sinh 1 của thành phố Hà Nội (gồm các trường Trung học phổ thông trên địa bàn các quận Ba Đình và Tây Hồ).



(Theo *Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội*)

Lập bảng tần số và bảng tần số tương đối cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

Giải

Bảng tần số:

Nguyện vọng	1	2	3
Tần số	5 376	4 873	1 247

Tổng số nguyện vọng là $n = 5\,376 + 4\,873 + 1\,247 = 11\,496$.

Tỉ lệ nguyện vọng 1: $\frac{5\,376}{11\,496} \cdot 100\% \approx 46{,}8\%$; tỉ lệ nguyện vọng 2: $\frac{4\,873}{11\,496} \cdot 100\% \approx 42{,}4\%$; tỉ lệ nguyện vọng 3: $\frac{1\,247}{11\,496} \cdot 100\% \approx 10{,}8\%$.

Bảng tần số tương đối:

Nguyện vọng	1	2	3
Tần số tương đối	46,8%	42,4%	10,8%

BÀI TẬP

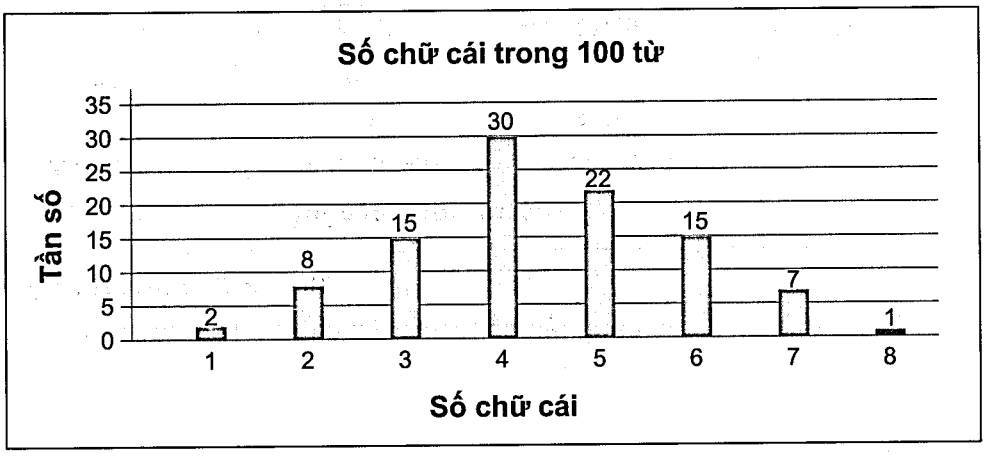
7.9. Một xạ thủ bắn 50 lần vào bia và ghi lại điểm của 50 lần bắn như sau:

Điểm	10	9	8	7
Tần số	15	25	7	3

a) Lập bảng tần số tương đối cho kết quả thu được.

b) Ước lượng cho xác suất xạ thủ được điểm lớn hơn hoặc bằng 9 khi bắn vào bia.

7.10. Bạn Giang chọn một đoạn văn gồm 100 từ và đếm số chữ cái trong mỗi từ của đoạn văn này cho kết quả như trong biểu đồ sau:



a) Lập bảng tần số tương đối cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

b) Tìm ước lượng cho xác suất một từ có nhiều hơn 5 chữ cái.

7.11. Kết quả bình chọn của khán giả cho danh hiệu cầu thủ xuất sắc nhất giải bóng đá học sinh trường Trung học cơ sở Chu Văn An năm học vừa qua đối với năm cầu thủ được ban tổ chức đề cử như sau:

Cầu thủ	An	Tân	Việt	Bình	Lê
Số lượng bình chọn	55	135	100	70	40

a) Lập bảng tần số tương đối cho bảng dữ liệu trên.

b) Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối thu được ở câu a.

7.12. Bảng sau là kết quả đánh giá của khách hàng về chất lượng phục vụ của một lái xe công nghệ, mỗi gạch biểu diễn một lần đánh giá:

★★	𝍸 III
★★★	𝍸 IIII
★★★★	𝍸 𝍸 𝍸 II
★★★★★	𝍸 I

a) Lập bảng tần số và bảng tần số tương đối cho dữ liệu trên.

b) Ước lượng cho xác suất một khách hàng đánh giá ở mức từ ba sao trở xuống.

7.13. Bảng tần số tương đối sau cho biết kết quả tập luyện của một vận động viên bắn súng:

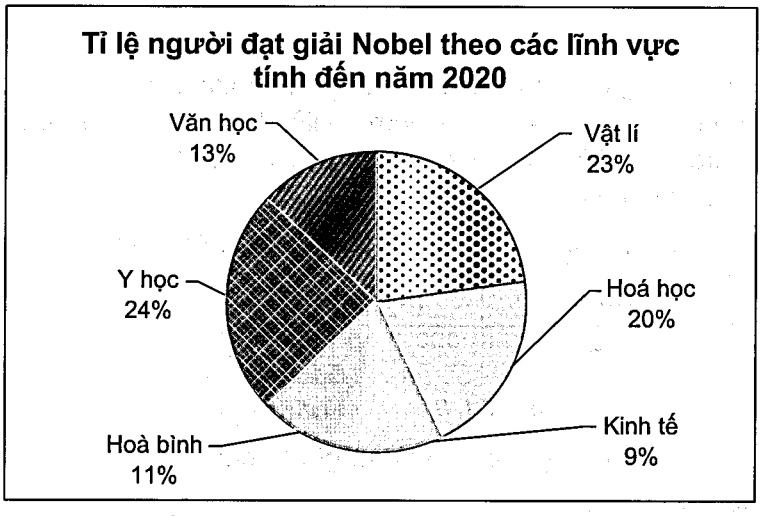
Điểm	7	8	9	10
Tần số tương đối	5%	15%	55%	x%

a) Xác định giá trị của x.

b) Ước lượng xác suất bắn trúng vòng 9 điểm hoặc vòng 10 điểm của vận động viên này.

c) Biết rằng vận động viên đã bắn 200 viên đạn trong quá trình luyện tập. Tính số lần bắn trúng vòng 9 điểm hoặc vòng 10 điểm của vận động viên này.

7.14. Cho biểu đồ hình quạt tròn sau:



a) Giải thích các số liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

b) Lập bảng tần số tương đối cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

7.15. Cho bảng thống kê sau về số lượng học sinh tại một trường tham gia các câu lạc bộ (CLB):

	CLB tiếng Anh	CLB Toán	CLB Khoa học	Tổng
Nam	40	60	50	150
Nữ	70	30	65	165
Tổng	110	90	115	315

a) Lập các bảng tần số tương đối biểu diễn tỉ lệ học sinh nam, nữ tham gia các câu lạc bộ.

b) Vẽ các biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn các bảng tần số tương đối thu được ở câu a.

7.16. Với số liệu cho trong bài tập 7.15, hãy:

a) Lập bảng tần số tương đối cho tỉ lệ học sinh tham gia các câu lạc bộ.

b) Vẽ biểu đồ cột biểu diễn bảng tần số tương đối thu được ở câu a.

BÀI 24 BẢNG TẦN SỐ, TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI GHÉP NHÓM VÀ BIỂU ĐỒ

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Trong nhiều trường hợp, ta khó biết giá trị chính xác của số liệu mà chỉ biết nó thuộc một nhóm số liệu nào đó. Nhóm số liệu thường gặp là $[a; b)$, trong đó a là đầu mút trái, b là đầu mút phải. Nhóm số liệu $[a; b)$ gồm các số liệu lớn hơn hoặc bằng a và nhỏ hơn b.

– Bảng tần số ghép nhóm là bảng tần số của các nhóm số liệu:

Nhóm	$[a_1; a_2)$	$[a_2; a_3)$	...	$[a_k; a_{k+1})$
Tần số	m_1	m_2	...	m_k

Bảng 7.1. Bảng tần số ghép nhóm

– Tần số m_i của nhóm $[a_i; a_{i+1})$ là số giá trị của mẫu số liệu lớn hơn hoặc bằng a_i và nhỏ hơn a_{i+1}.

– Bảng tần số tương đối ghép nhóm là bảng tần số tương đối của các nhóm số liệu:

Nhóm	$[a_1; a_2)$	$[a_2; a_3)$	...	$[a_k; a_{k+1})$
Tần số tương đối	f_1	f_2	...	f_k

Bảng 7.2. Bảng tần số tương đối ghép nhóm

trong đó, $n = m_1 + ... + m_k$; $f_1 = \frac{m_1}{n} \cdot 100\%$ là tần số tương đối của nhóm $[a_1; a_2)$, ..., $f_k = \frac{m_k}{n} \cdot 100\%$ là tần số tương đối của nhóm $[a_k; a_{k+1})$.

2. Để biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm bằng biểu đồ ta có thể dùng biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột hoặc biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng.

– Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột (còn gọi là tổ chức đồ, tiếng Anh là histogram) là biểu đồ gồm các cột liền nhau để biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm. Trong biểu đồ này, khi các nhóm có độ dài bằng nhau thì chiều cao mỗi cột biểu diễn tần số tương đối của nhóm số liệu.

– Để vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm với các nhóm số liệu có độ dài bằng nhau ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Vẽ trục đứng, trục ngang. Trên trục đứng xác định đơn vị độ dài phù hợp với các tần số tương đối. Trên trục ngang xác định các nhóm số liệu cần biểu diễn.

Bước 2. Dựng các hình cột (kề nhau) ứng với các nhóm dữ liệu, mỗi hình cột có chiều cao bằng tần số tương đối của nhóm số liệu.

Bước 3. Ghi chú giải cho các trục, các cột và tiêu đề cho biểu đồ.

– Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng là biểu đồ dùng đường gấp khúc để biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm. Để vẽ biểu đồ này ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Chọn giá trị $x_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$ đại diện cho nhóm số liệu $[a_i; a_{i+1})$ với $i = 1, 2,..., k$.

Bước 2. Vẽ trục ngang để biểu diễn các giá trị đại diện cho các nhóm số liệu, vẽ trục đứng thể hiện tần số tương đối.

Bước 3. Với mỗi giá trị đại diện x_i trên trục ngang và tần số tương đối f_i tương ứng ta xác định một điểm $M_i(x_i; f_i)$. Nối các điểm liên tiếp với nhau.

Bước 4. Ghi chú giải cho các các trục, các điểm và tiêu đề của biểu đồ.

Trong cách vẽ biểu đồ trên, nếu thay tần số tương đối bằng tần số thì ta có biểu đồ tần số ghép nhóm dạng đoạn thẳng.

B KĨ NĂNG GIẢI TOÁN

– Thiết lập, đọc và giải thích được bảng tần số ghép nhóm, bảng tần số tương đối ghép nhóm.

– Chuyển được bảng tần số ghép nhóm sang bảng tần số tương đối ghép nhóm và ngược lại.

– Đọc và giải thích được số liệu biểu diễn trên biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm.

– Vẽ được biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột và dạng đoạn thẳng để biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm.

Ví dụ 1 Thống kê thời gian đi từ nhà đến cơ quan (đơn vị tính là phút) của 40 nhân viên một công ty được kết quả như sau:

9 12 59 47 53 5 14 32 35 40 35 10 10 4 8 20 28 23 42 44

33 39 18 20 16 25 29 27 18 17 20 23 27 29 31 41 40 40 55 50.

a) Hoàn thiện bảng tần số ghép nhóm sau:

Thời gian (phút)	[0; 15)	[15; 30)	[30; 45)	[45; 60)
Tần số	?	?	?	?

b) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho bảng tần số ghép nhóm thu được.

Giải

a) Có 8 nhân viên của công ty đi làm hết dưới 15 phút; 15 nhân viên đi làm hết từ 15 phút đến dưới 30 phút; 12 nhân viên đi làm hết từ 30 phút đến dưới 45 phút; 5 nhân viên đi làm hết từ 45 phút đến dưới 60 phút.

Ta có bảng tần số ghép nhóm sau:

Thời gian (phút)	[0; 15)	[15; 30)	[30; 45)	[45; 60)
Tần số	8	15	12	5

b) Số nhân viên của công ty là $n = 40$. Các tần số tương đối tương ứng là:

$$f_1 = \frac{8}{40} \cdot 100\% = 20\%;\ f_2 = \frac{15}{40} \cdot 100\% = 37{,}5\%;$$

$$f_3 = \frac{12}{40} \cdot 100\% = 30\%;\ f_4 = \frac{5}{40} \cdot 100\% = 12{,}5\%.$$

Ta có bảng tần số tương đối ghép nhóm sau:

Thời gian (phút)	[0; 15)	[15; 30)	[30; 45)	[45; 60)
Tần số tương đối	20%	37,5%	30%	12,5%

Ví dụ 2 Cho bảng tần số tương đối ghép nhóm về thời gian làm bài tập về nhà trong tuần (đơn vị tính là giờ) của 40 bạn học sinh lớp 9A.

Thời gian (giờ)	[0; 3)	[3; 6)	[6; 9)	[9; 12)	[12; 15)
Tần số tương đối	15%	20%	25%	30%	10%

a) Tính tỉ lệ học sinh trong lớp dành ít nhất 6 giờ trong tuần để làm bài tập về nhà.

b) Có bao nhiêu học sinh lớp 9A dành ít nhất 6 giờ trong tuần để làm bài tập về nhà?

c) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm trên.

Giải

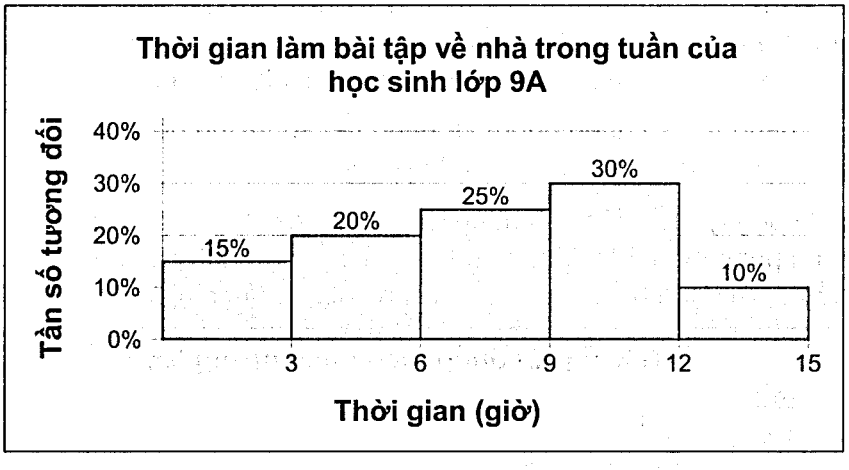
a) Tỉ lệ học sinh trong lớp dành ít nhất 6 giờ trong tuần để làm bài tập về nhà là:

$$25\% + 30\% + 10\% = 65\%.$$

b) Số học sinh lớp 9A dành ít nhất 6 giờ trong tuần để làm bài tập về nhà là:

$$40 \cdot 65\% = 26 \text{ (học sinh)}.$$

c) Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột:



BÀI TẬP

7.17. Bảng tần số ghép nhóm sau cho biết cân nặng của một số con voi khi vừa sinh ra (đơn vị tính là kg):

Cân nặng (kg)	[110; 115)	[115; 120)	[120; 125)	[125; 130)
Tần số	8	15	17	10

a) Đọc và giải thích dữ liệu cho bởi bảng tần số ghép nhóm trên.

b) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm.

7.18. Một nhóm học sinh lớp 9B thực hiện 20 lần đo hiệu điện thế và cường độ dòng điện để xác định công suất của một chiếc quạt điện và thu được bảng tần số tương đối ghép nhóm sau:

Công suất (W)	[72; 73)	[73; 74)	[74; 75)	[75; 76)	[76; 77)
Tần số tương đối	10%	20%	30%	25%	15%

a) Đọc và giải thích thông tin của hai nhóm dữ liệu cho bởi bảng tần số tương đối ghép nhóm trên.

b) Lập bảng tần số ghép nhóm cho kết quả 20 lần đo của nhóm học sinh.

7.19. Một phòng khám đo và ghi lại huyết áp tâm thu (đơn vị tính là mmHg) của một số người đến khám bệnh thu được kết quả như sau:

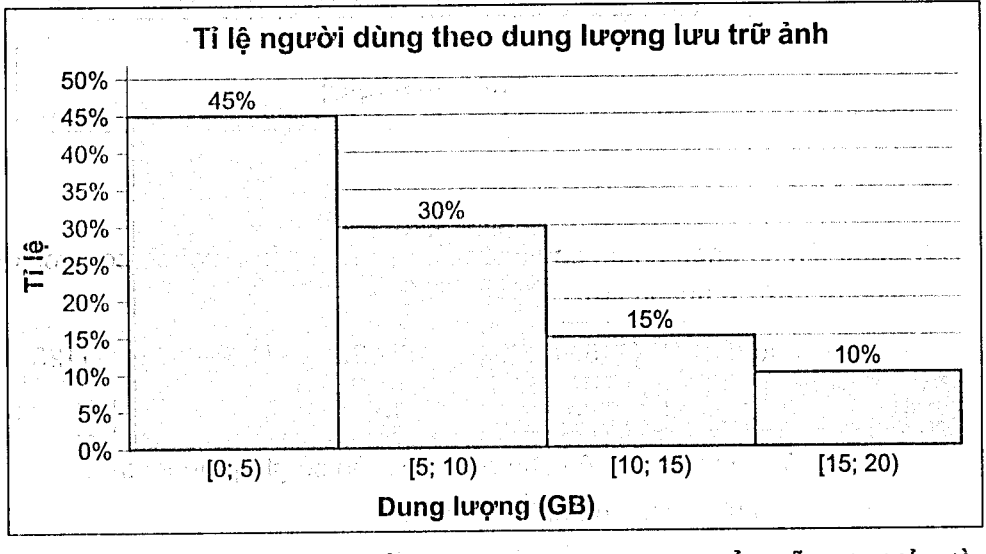
118 100 107 135 127 158 179 95 127 130 135 116 182 166 164

99 112 129 134 144 158 97 175 110 99 128 134 192 149 135 90.

Theo Hiệp hội Tim mạch Hoa Kỳ, người bình thường có huyết áp tâm thu từ 90 mmHg đến dưới 120 mmHg, người ở dạng tiền tăng huyết áp có huyết áp tâm thu từ 120 mmHg đến dưới 140 mmHg; người bị tăng huyết áp có huyết áp tâm thu lớn hơn hoặc bằng 140 mmHg.

Lập bảng tần số ghép nhóm và bảng tần số tương đối ghép nhóm cho dãy số liệu trên theo các mức bệnh huyết áp.

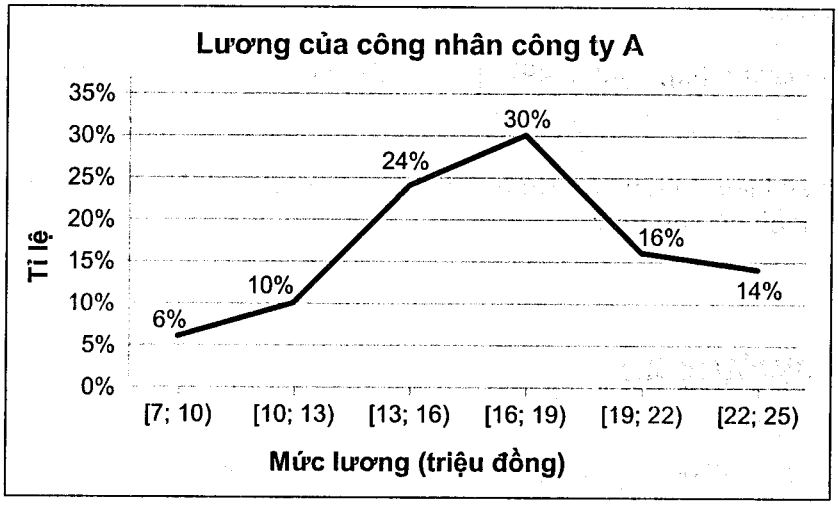
7.20. Một công ty quản lý phần mềm ứng dụng trực tuyến đã thống kê tỉ lệ người dùng phần mềm này theo dung lượng bộ nhớ dành cho lưu trữ ảnh và biểu diễn dưới dạng biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột như sau:



a) Đọc và giải thích thông tin về một nhóm dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

b) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

7.21. Cho biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng sau:



a) Đọc và giải thích thông tin về hai nhóm dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

b) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

c) Biết rằng công ty A có 300 người, lập bảng tần số ghép nhóm cho lương của công nhân công ty này.

7.22. Bảng thống kê sau cho biết thời gian học tiếng Anh (đơn vị là năm, tính từ lúc bắt đầu học tiếng Anh đến thời điểm khảo sát) của một số học sinh lớp 9.

Thời gian (năm)	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)
Số học sinh	8	12	15	10	5

a) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho bảng thống kê trên.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm thu được ở câu a.

7.23. Bảng tần số ghép nhóm sau cho biết thành tích luyện tập của một vận động viên nghiệp dư chạy maraton 42 km.

Thời gian (giờ)	[6; 6,5)	[6,5; 7)	[7; 7,5)	[7,5; 8)	[8; 8,5)
Số lần	2	6	7	4	1

a) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho bảng thống kê trên.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm thu được.

7.24. Kiểm tra khối lượng của một số bao xi măng trước khi xuất xưởng cho kết quả như sau:

Khối lượng (kg)	[48,5; 49)	[49; 49,5)	[49,5; 50)	[50; 50,5)	[50,5; 51)
Tỉ lệ	5%	10%	35%	40%	10%

Vẽ các biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột và dạng đoạn thẳng biểu diễn dữ liệu trên.

ÔN TẬP CHƯƠNG VII

A CÂU HỎI (Trắc nghiệm)

Sử dụng dữ liệu sau để trả lời các câu hỏi từ câu 1 đến câu 3.

Dữ liệu về điểm thi học kì môn Toán của 40 học sinh lớp 9D được cho như sau:

8, 7, 9, 8, 7, 6, 5, 3, 10, 9, 8, 7, 7, 8, 8, 9, 6, 5, 7, 10,

9, 8, 6, 8, 9, 10, 6, 7, 2, 8, 7, 6, 9, 10, 8, 8, 6, 5, 9, 7.

1. Tần số xuất hiện của điểm 8 trong dãy dữ liệu trên là

A. 8. B. 9. C. 10. D. 11.

2. Tần số tương đối của điểm 10 trong dãy dữ liệu trên là

A. 5%. B. 10%. C. 15%. D. 20%.

3. Để biểu diễn số lượng học sinh theo điểm thi môn Toán đạt được thì ta không thể dùng biểu đồ nào?

A. Biểu đồ cột kép. B. Biểu đồ tần số dạng cột.

C. Biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng. D. Biểu đồ tranh.

Sử dụng dữ liệu sau để trả lời các câu hỏi từ câu 4 đến câu 6.

Bảng tần số tương đối ghép nhóm sau cho biết thông tin về tỉ lệ học sinh lớp 9A theo khoảng cách từ nhà đến trường:

Khoảng cách (km)	[0; 1)	[1; 2)	[2; 3)	[3; 4)
Tần số tương đối	25%	50%	x%	10%

4. Giá trị của x là

A. 10. B. 15. C. 20. D. 25.

5. Muốn biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm trên ta có thể dùng biểu đồ nào sau đây?

A. Biểu đồ tần số ghép nhóm. B. Biểu đồ tần số dạng cột.

C. Biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng. D. Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm.

6. Để vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng biểu diễn bảng thống kê trên ta chọn giá trị nào làm giá trị đại diện cho nhóm [2; 3)?

A. 0,5. B. 1,5. C. 2,5. D. 3,5.

B BÀI TẬP

7.25. Kết thúc vòng tứ kết giải bóng đá của một trường Trung học cơ sở, có 4 đội lọt vào bán kết là các đội bóng lớp 9A, 9C, 8B và 7D. Ban tổ chức đã khảo sát học sinh trong trường với câu hỏi "Theo bạn, đội bóng nào sẽ vô địch?" với 4 phương án trả lời:

1. Đội bóng lớp 9A, 2. Đội bóng lớp 9C,

3. Đội bóng lớp 8B, 4. Đội bóng lớp 7D,

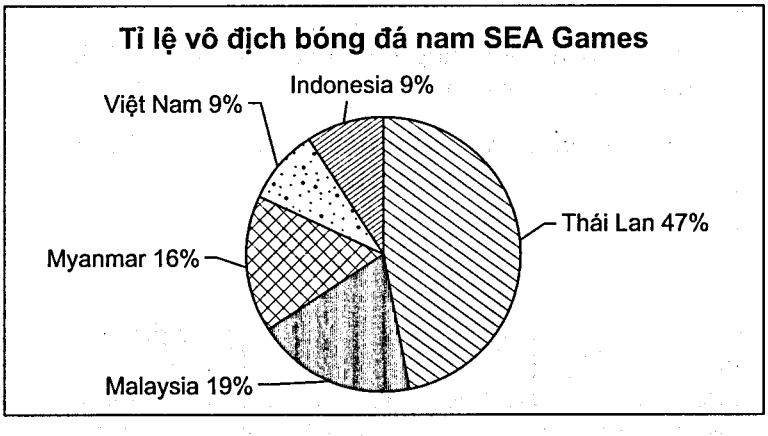
và thu được 500 phản hồi với 150 lựa chọn phương án 1, 200 lựa chọn phương án 2, 50 lựa chọn phương án 3 và 100 lựa chọn phương án 4.

a) Lập bảng tần số và bảng tần số tương đối cho kết quả thu được.

b) Tìm tỉ lệ học sinh không dự đoán hai đội bóng của khối lớp 9 vô địch giải bóng đá trường.

c) Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn tỉ lệ học sinh dự đoán mỗi đội vô địch.

7.26. Biểu đồ hình quạt tròn sau đây cho biết tỉ lệ vô địch bóng đá nam SEA Games của các đội bóng trong khu vực tính đến năm 2023.



(Theo *Liên đoàn Bóng đá Đông Nam Á*)

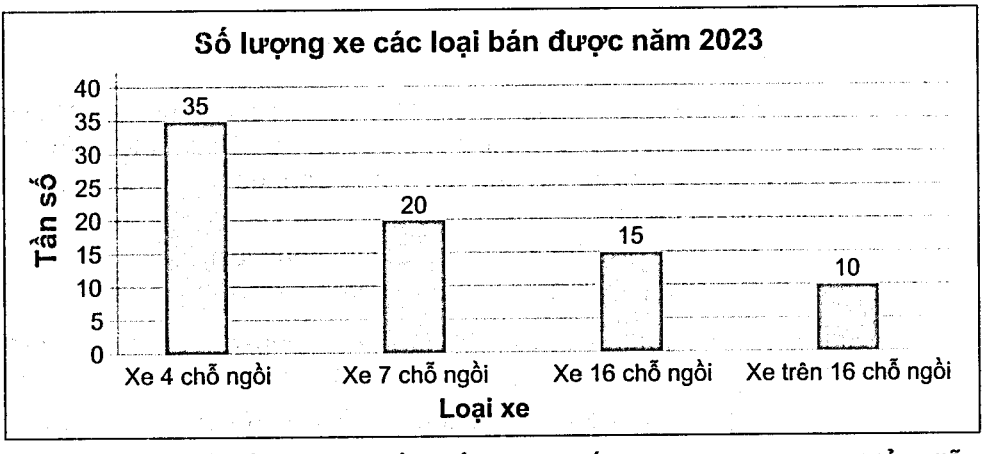
a) Lập bảng tần số tương đối cho biết tỉ lệ vô địch bóng đá nam SEA Games của các quốc gia trong khu vực.

b) Biết rằng tính đến năm 2023 môn Bóng đá nam đã được tổ chức ở 32 kì SEA Games. Lập bảng tần số cho số lần vô địch của các đội tuyển (làm tròn số liệu đến số nguyên gần nhất).

c) Vẽ biểu đồ tần số dạng cột biểu diễn bảng tần số thu được ở câu b.

d) Đội tuyển quốc gia nào có số lần vô địch bóng đá nam SEA Games nhiều nhất, với bao nhiêu lần?

7.27. Biểu đồ sau cho biết số lượng các loại ô tô một cửa hàng bán được trong năm 2023:

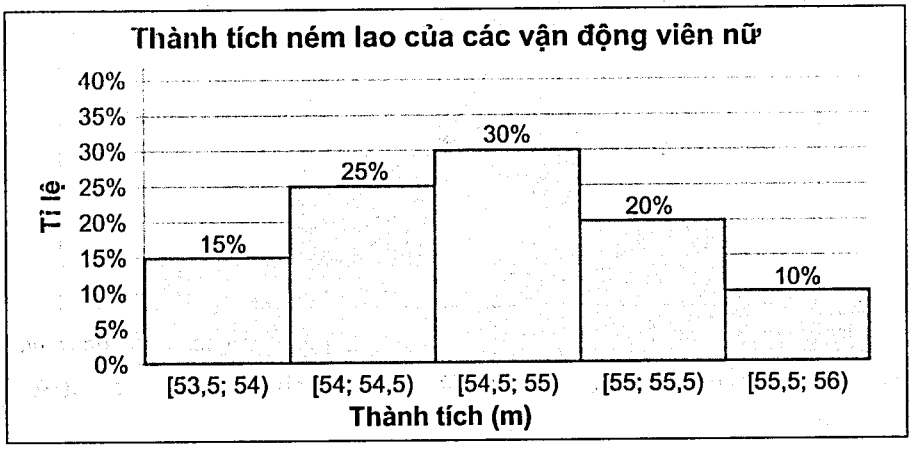


a) Lập bảng tần số và bảng tần số tương đối cho dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

b) Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối thu được ở câu a.

c) Giả sử tỉ lệ các loại xe bán được không đổi và cửa hàng bán được tổng số 200 ô tô các loại trong năm 2024. Hãy ước lượng số ô tô 7 chỗ cửa hàng bán được.

7.28. Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm sau cho biết thành tích ném lao của các vận động viên nữ tại một giải đấu:



a) Đọc và giải thích thông tin cho hai nhóm dữ liệu được biểu diễn trên biểu đồ.

b) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho dữ liệu này.

c) Biết rằng có 40 vận động viên nữ tham dự giải. Lập bảng tần số ghép nhóm (các tần số làm tròn đến số nguyên gần nhất).

7.29. Thành tích ném lao của 40 vận động viên nam trong giải thể thao trên được cho như sau:

Thành tích (m)	[70,5; 71)	[71; 71,5)	[71,5; 72)	[72; 72,5)	[72,5; 73)	[73; 73,5)
Số vận động viên	2	5	7	15	8	3

a) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm thu được ở câu a.

c) Từ biểu đồ thu được ở câu b và biểu đồ cho trong bài tập 7.28, hãy nhận xét về thành tích ném lao của các vận động viên nam và nữ.

7.30. Dữ liệu dưới đây cho biết cỡ giày của một nhóm 30 học sinh tại trường Trung học cơ sở C:

32, 33, 36, 34, 33, 32, 36, 34, 35, 34, 32, 33, 34, 36, 35,

34, 34, 34, 34, 34, 35, 34, 35, 33, 35, 34, 34, 35, 33, 34.

a) Lập bảng tần số cho dãy dữ liệu trên. Cỡ giày nào phù hợp với nhiều bạn nhất?

b) Lập bảng tần số tương đối cho dãy dữ liệu trên. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trường Trung học cơ sở C, hãy ước lượng xác suất để học sinh này đi giày cỡ 34.

c) Bảng sau quy định cỡ giày theo chiều dài của bàn chân:

Chiều dài bàn chân (cm)	[19; 19,4)	[19,4; 19,7)	[19,7; 20,6)	[20,6; 21,6)	[21,6; 22,2)
Cỡ giày	32	33	34	35	36

Lập bảng tần số và bảng tần số tương đối ghép nhóm theo chiều dài bàn chân của nhóm học sinh trên.

CHƯƠNG VIII XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ TRONG MỘT SỐ MÔ HÌNH XÁC SUẤT ĐƠN GIẢN

BÀI 25 PHÉP THỬ NGẪU NHIÊN VÀ KHÔNG GIAN MẪU

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

– Một hoặc một số hành động, thực nghiệm được tiến hành liên tiếp hay đồng thời mà kết quả của chúng không thể biết được trước khi thực hiện nhưng có thể liệt kê được tất cả các kết quả có thể xảy ra, được gọi là một phép thử ngẫu nhiên, gọi tắt là phép thử.

– Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử được gọi là không gian mẫu của phép thử ngẫu nhiên.

– Không gian mẫu của phép thử ngẫu nhiên được kí hiệu là Ω.

B KĨ NĂNG GIẢI TOÁN

Liệt kê được tất cả các kết quả có thể của phép thử ngẫu nhiên T. Từ đó ta có không gian mẫu của phép thử.

Ví dụ Bạn Tùng gieo một con xúc xắc và bạn Sơn gieo một đồng xu liên tiếp hai lần.

a) Phép thử là gì?

b) Mô tả không gian mẫu của phép thử.

Giải

a) Phép thử ngẫu nhiên là gieo một con xúc xắc và gieo một đồng xu liên tiếp hai lần.

b) Kết quả có thể của gieo một con xúc xắc là số chấm xuất hiện trên con xúc xắc: 1, 2, 3, 4, 5, 6 chấm. Kết quả có thể của gieo một đồng xu liên tiếp hai lần là SS, SN, NS, NN (mặt sấp (S), mặt ngửa (N)). Ta lập bảng sau:

Gieo đồng xu hai lần / Gieo xúc xắc	SS	SN	NS	NN
1	1SS	1SN	1NS	1NN
2	2SS	2SN	2NS	2NN
3	3SS	3SN	3NS	3NN
4	4SS	4SN	4NS	4NN
5	5SS	5SN	5NS	5NN
6	6SS	6SN	6NS	6NN

Mỗi ô là một kết quả có thể. Không gian mẫu là tập hợp 24 ô của bảng trên.

Vậy Ω = {1SS; 2SS; 3SS;...; 5NN; 6NN}.

BÀI TẬP

8.1. Túi I có 2 viên bi màu đen, kí hiệu là B_1, B_2 và 2 viên bi màu trắng, kí hiệu là T_1, T_2. Túi II có 3 viên bi màu xanh, kí hiệu là X_1, X_2, X_3 và 2 viên bi màu đỏ, kí hiệu là D_1, D_2, các viên bi có cùng kích thước. Từ mỗi túi lấy ngẫu nhiên một viên bi.

a) Phép thử là gì?

b) Mô tả không gian mẫu của phép thử.

8.2. Bạn Minh gieo một đồng xu và bạn Ngọc lấy ngẫu nhiên một quả bóng từ một hộp chứa 4 quả bóng với các màu xanh, đỏ, tím, vàng.

a) Phép thử là gì?

b) Có bao nhiêu kết quả có thể? Mô tả không gian mẫu của phép thử.

8.3. Túi A chứa 4 tấm thẻ được đánh số 1, 2, 3, 4. Túi B chứa 4 viên bi với các màu xanh, đỏ, tím, vàng. Từ túi A rút ngẫu nhiên một tấm thẻ đồng thời từ túi B lấy ngẫu nhiên một viên bi.

a) Phép thử là gì?

b) Có bao nhiêu kết quả có thể? Mô tả không gian mẫu của phép thử.

8.4. Một hộp đựng 6 chiếc kẹo với các nhãn hiệu A, B, C, D, E, F. Bạn Lan lấy ngẫu nhiên một chiếc kẹo cho vào cặp sách của mình. Tiếp đó bạn Hồng lấy ngẫu nhiên một chiếc kẹo từ hộp.

a) Phép thử và kết quả của phép thử là gì?

b) Mô tả không gian mẫu của phép thử. Không gian mẫu có bao nhiêu phần tử?

8.5. Một tấm bìa hình tròn được chia làm năm hình quạt tròn có diện tích bằng nhau, trên mỗi hình quạt lần lượt ghi các số 1, 2, 3, 4, 5 và được gắn vào trục quay có mũi tên cố định ở tâm. Bạn An quay tấm bìa hai lần và quan sát xem mũi tên chỉ vào hình quạt nào khi tấm bìa dừng lại.

a) Phép thử và kết quả của phép thử là gì?

b) Mô tả không gian mẫu của phép thử.

BÀI 26 XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ LIÊN QUAN TỚI PHÉP THỬ

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

– Cho phép thử T. Xét biến cố E, ở đó việc xảy ra hay không xảy ra của E tuỳ thuộc vào kết quả của phép thử T. Kết quả của phép thử T làm cho biến cố E xảy ra được gọi là *kết quả thuận lợi* cho E.

– Giả sử rằng các kết quả có thể của phép thử T là đồng khả năng. Khi đó xác suất của biến cố E, liên quan tới T, kí hiệu là $P(E)$, bằng tỉ số giữa số kết quả thuận lợi cho E và số phần tử của tập Ω:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)},$$

trong đó Ω là không gian mẫu của T; $n(E)$ là số kết quả thuận lợi cho biến cố E và $n(\Omega)$ là số phần tử của tập Ω.

B KĨ NĂNG GIẢI TOÁN

Việc tính xác suất của một biến cố E gồm các bước sau:

Bước 1. Liệt kê được tất cả các kết quả có thể của phép thử ngẫu nhiên T. Từ đó ta có không gian mẫu Ω. Xác định số kết quả có thể tức là số phần tử $n(\Omega)$ của không gian mẫu Ω.

Bước 2. Chứng tỏ được các kết quả có thể của phép thử là đồng khả năng.

Bước 3. Liệt kê được các kết quả thuận lợi cho biến cố E. Từ đó xác định số kết quả thuận lợi cho E, tức là số phần tử $n(E)$ của tập E gồm các kết quả thuận lợi.

Bước 4. Lập tỉ số giữa số kết quả thuận lợi cho biến cố E với số phần tử của không gian mẫu Ω.

Ví dụ 1 Bạn Hoà gieo một con xúc xắc cân đối và bạn Sơn gieo một đồng xu liên tiếp hai lần. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) *A*: "Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là 6 và hai lần đồng xu xuất hiện mặt ngửa";

b) *B*: "Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là 1 hoặc 2 và một lần đồng xu xuất hiện mặt sấp, một lần đồng xu xuất hiện mặt ngửa".

Giải

Ta liệt kê được tất cả các kết quả có thể của phép thử bằng cách lập bảng sau:

Hoà \ Sơn	SS	SN	NS	NN
1	1SS	1SN	1NS	1NN
2	2SS	2SN	2NS	2NN
3	3SS	3SN	3NS	3NN
4	4SS	4SN	4NS	4NN
5	5SS	5SN	5NS	5NN
6	6SS	6SN	6NS	6NN

Mỗi ô trong bảng là một kết quả có thể. Có 24 kết quả có thể là đồng khả năng.

a) Có 1 kết quả thuận lợi cho biến cố *A* là 6NN. Vậy $P(A) = \frac{1}{24}$.

b) Có 4 kết quả thuận lợi cho biến cố *B* là 1SN, 1NS, 2SN, 2NS. Vậy $P(B) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$.

Ví dụ 2 Bạn An gieo một đồng xu. Bạn Tùng rút ngẫu nhiên một tấm thẻ từ một hộp chứa 5 tấm thẻ có ghi chữ a, b, c, d, e. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) *E*: "Đồng xu xuất hiện mặt sấp và không rút được tấm thẻ ghi chữ a hoặc b";

b) *F*: "Đồng xu xuất hiện mặt ngửa hoặc rút được tấm thẻ ghi chữ b".

Giải

Ta liệt kê được tất cả các kết quả có thể của phép thử bằng cách lập bảng sau:

An \ Tùng	a	b	c	d	e
S	Sa	Sb	Sc	Sd	Se
N	Na	Nb	Nc	Nd	Ne

Mỗi ô trong bảng là một kết quả có thể. Có 10 kết quả có thể là đồng khả năng.

a) Có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố E là Sc, Sd, Se. Vậy $P(E) = \frac{3}{10}$.

b) Có 6 kết quả thuận lợi cho biến cố F là Na, Nb, Nc, Nd, Ne, Sb.

Vậy $P(F) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

BÀI TẬP

8.6. Gieo đồng thời một con xúc xắc và một đồng xu. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) E: "Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là số lẻ";

b) F: "Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là số chẵn và đồng xu xuất hiện mặt ngửa".

8.7. Gieo một con xúc xắc liên tiếp hai lần. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên con xúc xắc trong hai lần gieo lớn hơn hoặc bằng 8.

8.8. Bạn Hạnh gieo một con xúc xắc và bạn Hằng rút ngẫu nhiên một tấm thẻ từ một hộp chứa 4 tấm thẻ ghi các chữ A, B, C, D. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) E: "Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là 6";

b) F: "Rút được tấm thẻ ghi chữ A hoặc số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là 5".

8.9. Bạn Bình gieo một đồng xu cân đối và bạn Thịnh gieo một con xúc xắc cân đối. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) E: "Đồng xu xuất hiện mặt sấp và số chấm xuất hiện trên con xúc xắc lớn hơn 3";

b) F: "Đồng xu xuất hiện mặt ngửa hoặc số chấm xuất hiện trên con xúc xắc lớn hơn 3".

8.10. Hai túi I và II chứa các viên bi có cùng kích thước. Túi I chứa 4 viên bi được ghi các số 1, 2, 3, 4. Túi II chứa 5 viên bi được ghi các số 1, 2, 3, 4, 5. Bạn Mai lấy ngẫu nhiên một viên bi từ túi I và bạn Tuấn lấy ngẫu nhiên một viên bi từ túi II. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) A: "Hai số ghi trên hai viên bi khác nhau";

b) B: "Hai số ghi trên hai viên bi chênh nhau 1 đơn vị";

c) C: "Hai số ghi trên hai viên bi chênh nhau 3 đơn vị".

8.11. Một tấm bìa hình tròn được chia làm bốn phần có diện tích bằng nhau; ghi các số 1, 2, 3, 4 và được gắn vào trục quay có mũi tên cố định ở tâm. Bạn Nam quay tấm bìa, bạn Bình gieo một con xúc xắc cân đối. Giả sử mũi tên dừng ở hình quạt ghi số m và số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là n.

Tính xác suất của các biến cố sau:

a) E: "Trong hai số m và n, chỉ có một số nguyên tố";

b) F: "Tổng của hai số m và n lớn hơn 6".

8.12. Có ba chiếc hộp. Hộp A chứa 2 tấm thẻ ghi các số 1, 2. Hộp B chứa 3 tấm thẻ ghi các số 1, 2, 3. Hộp C chứa 4 quả cầu ghi các số 1, 2, 3, 4. Bạn Lan rút ngẫu nhiên đồng thời một tấm thẻ từ mỗi hộp A và B. Bạn Linh lấy ngẫu nhiên một quả cầu từ hộp C. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) E: "Ba số ghi trên hai tấm thẻ và quả cầu là khác nhau";

b) F: "Tổng ba số ghi trên hai tấm thẻ và quả cầu bằng 5".

ÔN TẬP CHƯƠNG VIII

A Câu hỏi (Trắc nghiệm)

1. Có hai túi I và II. Túi I chứa ba quả cầu ghi các số 1, 2, 3. Túi II chứa bốn tấm thẻ ghi các số 1, 2, 3, 4. Lấy ngẫu nhiên một quả cầu và một tấm thẻ từ mỗi túi I và II. Xác suất của biến cố "Tích hai số ghi trên quả cầu và tấm thẻ bằng 6" là

A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{1}{7}$. C. $\frac{2}{11}$. D. $\frac{1}{4}$.

2. Hai bạn Minh và Dung mỗi người gieo ngẫu nhiên một con xúc xắc cân đối. Xác suất để số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc như nhau là

A. $\frac{2}{11}$. B. $\frac{1}{7}$. C. $\frac{1}{6}$. D. $\frac{1}{4}$.

3. Bạn Sơn gieo một đồng xu cân đối và bạn Hoà gieo đồng thời hai đồng xu cân đối. Xác suất để có hai đồng xu xuất hiện mặt sấp, một đồng xu xuất hiện mặt ngửa là

A. $\frac{3}{8}$. B. $\frac{3}{10}$. C. $\frac{2}{7}$. D. $\frac{4}{31}$.

B BÀI TẬP

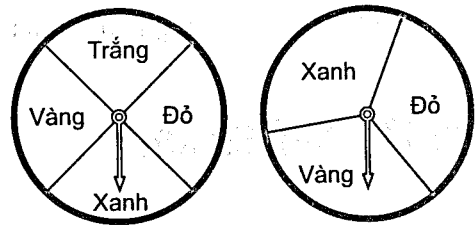
8.13. Bạn An gieo một con xúc xắc cân đối và bạn Bình gieo một đồng xu cân đối. Tính xác suất của các biến cố sau:

- E: "Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là 6 và đồng xu xuất hiện mặt sấp";
- F: "Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là số lẻ";

• *G*: "Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là số chẵn và đồng xu xuất hiện mặt sấp";

• *H*: "Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là 5 hoặc đồng xu xuất hiện mặt ngửa".

8.14. Trong một trò chơi, có hai bánh xe, mỗi bánh xe được gắn vào trục quay có mũi tên ở tâm. Bánh xe thứ nhất được chia làm bốn hình quạt như nhau và sơn các màu: trắng, đỏ, xanh, vàng. Bánh xe thứ hai được chia làm ba hình quạt như nhau và sơn các màu: đỏ, xanh, vàng. Người chơi quay hai bánh xe. Người chơi đạt giải nhất nếu hai mũi tên dừng lại ở hai hình quạt màu đỏ, đạt giải nhì nếu hai mũi tên dừng lại ở hai hình quạt cùng màu và đạt giải ba nếu có đúng một mũi tên dừng ở hình quạt màu đỏ. Tính xác suất của các biến cố sau:



a) *E*: "Người chơi đạt giải nhất";

b) *F*: "Người chơi đạt giải nhì";

c) *G*: "Người chơi đạt giải ba".

8.15. Bạn Tuấn viết ba bức thư cho ba người bạn là An, Bình, Cường và viết tên, địa chỉ của ba người bạn đó lên ba chiếc phong bì. Xếp ngẫu nhiên ba bức thư đó vào ba phong bì.

a) Mô tả không gian mẫu của phép thử.

b) Tính xác suất của các biến cố sau:

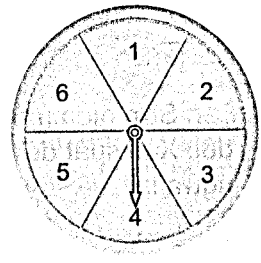
• *E*: "Có đúng một bức thư đúng địa chỉ";

• *F*: "Cả ba bức thư đúng địa chỉ";

• *G*: "Không có bức thư nào đúng địa chỉ";

• *H*: "Có ít nhất một bức thư đúng địa chỉ".

8.16. Một tấm bìa hình tròn được chia làm sáu hình quạt tròn có diện tích bằng nhau; ghi các số 1, 2, 3, 4, 5, 6 và được gắn vào trục quay có mũi tên cố định ở tâm. Quay tấm bìa hai lần. Tính xác suất để mũi tên chỉ vào hai hình quạt tròn không đối xứng nhau qua tâm.



8.17. Màu hạt của đậu Hà Lan có hai kiểu hình là vàng và xanh. Có hai gene ứng với hai kiểu hình này allele trội A và allele lặn a. Hình dạng hạt của đậu Hà Lan có hai kiểu hình là hạt trơn và hạt nhăn. Có hai gene ứng với hai kiểu hình này allele trội B và allele lặn b. Khi cho lai hai cây đậu Hà Lan, cặp gene của cây con lấy ngẫu nhiên một gene từ cây bố và một gene từ cây mẹ. Giả sử cả cây bố và cây mẹ có kiểu hình "Hạt vàng và trơn". Cây bố có kiểu gene là (Aa, Bb), cây mẹ có kiểu gene là (Aa, Bb). Tính xác suất để cây con có kiểu hình như cây bố và cây mẹ.

CHƯƠNG IX ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

BÀI 27 GÓC NỘI TIẾP

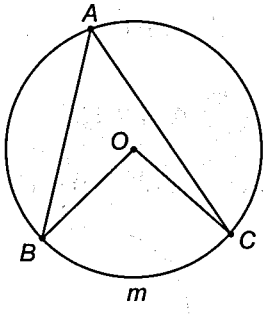
A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

– Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó. Cung nằm bên trong góc được gọi là cung bị chắn.

Trong Hình 9.1:

+ Góc BAC là góc nội tiếp của đường tròn (O);

+ Góc nội tiếp BAC chắn cung $\overset{\frown}{BmC}$.



Hình 9.1

– Định lí: Trong một đường tròn, số đo góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn:

$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\text{sđ } \overset{\frown}{BmC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BOC}.$$

– Đối với các góc nội tiếp của cùng một đường tròn hoặc của hai đường tròn bằng nhau, ta có các khẳng định sau:

+ Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.

+ Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.

+ Các góc nội tiếp chắn cung nhỏ thì có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm chắn cùng một cung.

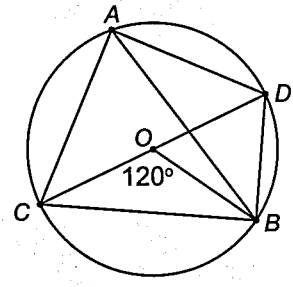
+ Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

B KĨ NĂNG GIẢI TOÁN

– Nhận biết được góc nội tiếp của một đường tròn và cung bị chắn.

– Áp dụng được định lí về số đo góc nội tiếp và góc ở tâm để tính số đo các góc trong các trường hợp đơn giản.

Ví dụ Cho các điểm A, B, C, D trên đường tròn (O) như Hình 9.2. Biết rằng CD là đường kính của (O) và $\overset{\frown}{BOC} = 120^\circ$, hãy tính số đo các góc BAC và BAD.



Hình 9.2

Giải

Xét trong đường tròn (O), ta có:

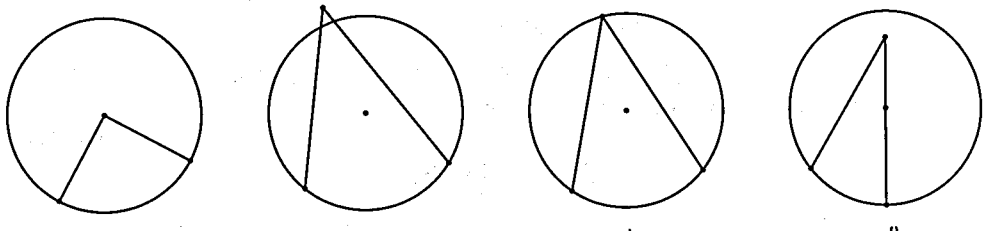
– Góc nội tiếp BAC và góc ở tâm BOC cùng chắn cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$ nên $\overset{\frown}{BAC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BOC} = 60^\circ$;

– Vì CD là đường kính nên góc nội tiếp CAD chắn nửa đường tròn và do đó $\overset{\frown}{CAD} = 90^\circ$.

Suy ra $\overset{\frown}{BAD} = \overset{\frown}{CAD} - \overset{\frown}{BAC} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

BÀI TẬP

9.1. Hình nào dưới đây vẽ một góc nội tiếp của đường tròn?



Hình 9.3

9.2. Cho điểm A nằm trên cung lớn BC của đường tròn (O) và kí hiệu $\overset{\frown}{BC}$ là cung nhỏ BC. Vẽ bảng sau vào vở và viết số đo còn lại của góc hoặc cung tương ứng vào ô trống trong mỗi trường hợp:

	Trường hợp 1	Trường hợp 2	Trường hợp 3
Số đo của $\overset{\frown}{BAC}$	30°	?	?
Số đo của $\overset{\frown}{BC}$	?	80°	?
Số đo của $\overset{\frown}{BOC}$	?	?	120°

9.3. Cho AB và CD là hai đường kính của đường tròn (O). Biết rằng $\overset{\frown}{AOC} = 80^\circ$, tính số đo của các góc ABC, ADC và ABD.

9.4. Cho đường tròn (O) và hai dây cung AB, CD cắt nhau tại X. Tính số đo các góc của tam giác AXC, biết rằng $\overset{\frown}{XBD} = 60^\circ$, $\overset{\frown}{XDB} = 70^\circ$.

9.5. Cho hai điểm B, C nằm trên đường tròn (O) và cho điểm A nằm trên cung lớn $\overset{\frown}{BC}$. Biết rằng $\overset{\frown}{OBA} = 30^\circ$, $\overset{\frown}{OCA} = 40^\circ$. Tính số đo các góc của tam giác ABC.

9.6. Cho đường tròn (O) có đường kính AB và điểm C thuộc đường tròn sao cho C khác A, B. Lấy E là điểm đối xứng của A qua C. Chứng minh rằng $BE = BA$.

9.7. Cho tam giác nhọn ABC cân tại A. Đường tròn đường kính AB cắt các cạnh AC, BC của tam giác ABC tại X và Y (X khác A, Y khác B).

a) Chứng minh rằng tam giác CXY cân tại Y.

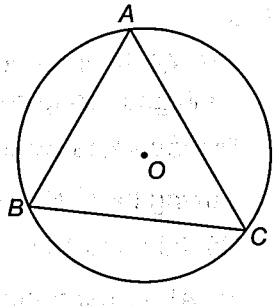
b) Cho BX cắt AY tại K. Chứng minh rằng CK vuông góc với AB.

BÀI 28 ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP CỦA MỘT TAM GIÁC

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đường tròn ngoại tiếp một tam giác là đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác đó. Trong Hình 9.4:

+ Đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC. Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O);
+ Tâm O là giao điểm của ba đường trung trực của tam giác ABC.



Hình 9.4

– Đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông có tâm là trung điểm của cạnh huyền và bán kính bằng một nửa cạnh huyền.

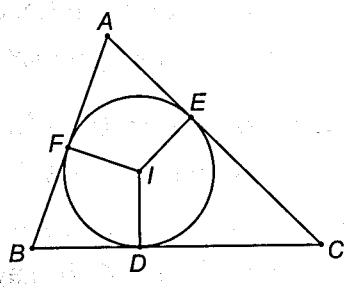
– Đường tròn ngoại tiếp tam giác đều cạnh a có tâm là trọng tâm của tam giác đó và bán kính bằng $\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

2. Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tam giác được gọi là đường tròn nội tiếp tam giác. Tam giác đó được gọi là ngoại tiếp đường tròn. Tâm đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm ba đường phân giác của tam giác.

Trong Hình 9.5:

+ Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC. Tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I);
+ Tâm I là giao điểm của ba đường phân giác của tam giác ABC.

– Đường tròn nội tiếp tam giác đều cạnh a có tâm là trọng tâm của tam giác đó và bán kính bằng $\frac{\sqrt{3}}{6}a$.



Hình 9.5

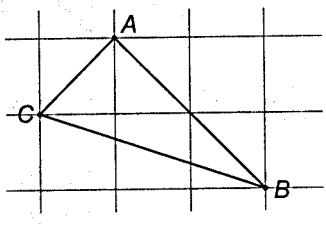
B KĨ NĂNG GIẢI TOÁN

– Nhận biết được đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp của một tam giác.

– Xác định được tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác, trong đó có tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông, tam giác đều.

– Xác định được tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác, trong đó có tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đều.

Ví dụ Trên giấy kẻ ô vuông (cạnh ô vuông bằng 1 cm), cho các điểm A, B, C như Hình 9.6. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.



Hình 9.6

Giải

• Vì AC là cạnh huyền của tam giác vuông cân với cạnh góc vuông có độ dài bằng 1 cm nên theo định lí Pythagore, ta có: $AC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, hay $AC = \sqrt{2}$ (cm).

Tương tự, vì BC là cạnh huyền của tam giác vuông với hai cạnh góc vuông có độ dài bằng 1 cm và 3 cm, nên $BC^2 = 1^2 + 3^2 = 10$, hay $BC = \sqrt{10}$ (cm).

Vì AB là cạnh huyền của tam giác vuông cân với cạnh góc vuông có độ dài bằng 2 cm, nên $AB^2 = 2^2 + 2^2 = 8$, hay $AB = \sqrt{8}$ (cm).

Do đó $BC^2 = AC^2 + AB^2$. Vậy theo định lí Pythagore đảo thì tam giác ABC vuông tại A.

Suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâm là trung điểm của BC và bán kính là: $R = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ (cm).

• Gọi $(I; r)$ là đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Khi đó, $S_{ABC} = S_{IBC} + S_{ICA} + S_{IAB}$.

Suy ra $\frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{1}{2}r \cdot BC + \frac{1}{2}r \cdot CA + \frac{1}{2}r \cdot AB$,

hay $r = \frac{AB \cdot AC}{BC + CA + AB} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{10}} = \frac{4}{3\sqrt{2} + \sqrt{10}}$ (cm).

BÀI TẬP

9.8. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Biết rằng $\widehat{ACB} = 50^\circ$, $\widehat{ABC} = 70^\circ$, tính số đo các cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$, $\overset{\frown}{AB}$ của đường tròn (O).

9.9. Cho tam giác ABC cân tại A và nội tiếp đường tròn (O). Tính số đo các góc của tam giác ABC, biết rằng $\widehat{BOC} = 100^\circ$.

9.10. Tính bán kính và chu vi của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có ba cạnh $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm và $BC = 10$ cm.

9.11. Tính chu vi và diện tích của tam giác đều nội tiếp một đường tròn bán kính 3 cm.

9.12. Tính chu vi và diện tích của tam giác đều ngoại tiếp một đường tròn bán kính 3 cm.

9.13. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 4$ cm, $AC = 6$ cm. Tính bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

9.14. Cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn (O) có bán kính 2 cm. Biết rằng $AC = 2$ cm, tính số đo các góc của tam giác ABC.

9.15. Cho tam giác ABC có trực tâm H và nội tiếp đường tròn (O). Chứng minh rằng:

a) $\widehat{OBC} = 90^\circ - \widehat{BAC}$;

b) $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$.

9.16. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Chứng minh rằng:

$$\widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{\overset{\frown}{BAC}}{2};\ \widehat{CIA} = 90^\circ + \frac{\overset{\frown}{CBA}}{2};\ \widehat{AIB} = 90^\circ + \frac{\overset{\frown}{ACB}}{2}.$$

9.17. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Cho điểm M trên cạnh BC của tam giác ABC và điểm D trên cung nhỏ BC của (O) sao cho $\overset{\frown}{BAD} = \overset{\frown}{MAC}$. Chứng minh rằng $\Delta AMB \backsim \Delta ACD$.

9.18. Cho tam giác ABC vuông tại B nội tiếp đường tròn (O) và đường kính BD. Tính số đo của góc BAC, biết rằng $\widehat{BAC} = 2\widehat{CBD}$.

9.19. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). Tia AI cắt (O) tại X (khác A). Chứng minh rằng X là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC.

9.20. Cho $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$ với tỉ số đồng dạng $k > 0$. Gọi (O, R) và (O', R') lần lượt là đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và $A'B'C'$. Gọi (I, r) và (I', r') lần lượt là đường tròn nội tiếp các tam giác ABC và $A'B'C'$. Chứng minh rằng $\frac{R}{R'} = \frac{r}{r'} = k$.

BÀI 29 TỨ GIÁC NỘI TIẾP

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn được gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn (hoặc đơn giản là tứ giác nội tiếp) và đường tròn được gọi là đường tròn ngoại tiếp tứ giác.
- **Định lí.** Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối nhau bằng 180°.
- Hình chữ nhật và hình vuông là các tứ giác nội tiếp. Đường tròn ngoại tiếp của chúng có tâm là giao điểm của hai đường chéo và bán kính bằng một nửa độ dài đường chéo.

B KĨ NĂNG GIẢI TOÁN

- Nhận biết được tứ giác nội tiếp một đường tròn.
- Tính được các góc của tứ giác nội tiếp dựa vào định lí về tổng các góc đối nhau.
- Tính được bán kính của đường tròn ngoại tiếp hình vuông, hình chữ nhật.

Ví dụ Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Chứng minh rằng:

a) $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$; $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$;

b) $\widehat{BHC} = 180^\circ - \widehat{BAC}$; $\widehat{CHA} = 180^\circ - \widehat{CBA}$; $\widehat{AHB} = 180^\circ - \widehat{ACB}$.

Giải (H.9.7)

a) Tứ giác $BCEF$ có $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^o$.

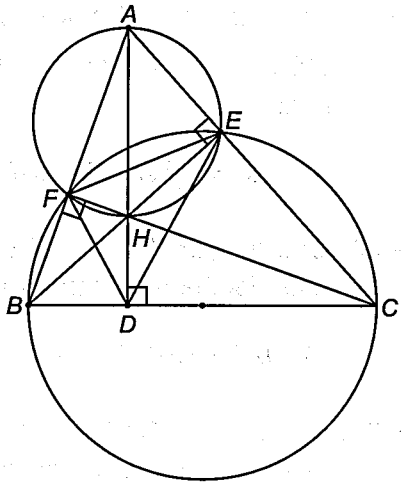
Do vậy các tam giác vuông BFC và BEC cùng ngoại tiếp đường tròn đường kính BC. Suy ra tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn đường kính BC. Do đó ta có:

$\widehat{FBC} + \widehat{FEC} = 180^o$ (tổng hai góc đối nhau của tứ giác nội tiếp $BCEF$).

Suy ra $\widehat{AEF} = 180^o - \widehat{FEC} = \widehat{FBC} = \widehat{ABC}$.

Tương tự, ta có:

$\widehat{AFE} = 180^o - \widehat{EFB} = \widehat{ECB} = \widehat{ACB}$.



Hình 9.7

b) Tứ giác $AEHF$ có $\widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90^o$.

Do vậy các tam giác vuông AEH và AFH cùng ngoại tiếp đường tròn đường kính AH. Suy ta tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn đường kính AH. Do đó:

$\widehat{EHF} + \widehat{EAF} = 180^o$ (hai góc đối nhau của tứ giác nội tiếp $AEHF$).

Suy ra $\widehat{BHC} = \widehat{EHF} = 180^o - \widehat{EAF} = 180^o - \widehat{BAC}$.

Tương tự, ta có $\widehat{CHA} = 180^o - \widehat{CBA}$; $\widehat{AHB} = 180^o - \widehat{ACB}$.

BÀI TẬP

9.21. Hãy cho biết số đo các góc còn lại của tứ giác nội tiếp $ABCD$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $\widehat{A} = 80^o$; $\widehat{B} = 120^o$;

b) $\widehat{B} = 70^o$; $\widehat{C} = 110^o$;

c) $\widehat{C} = 110^o$; $\widehat{D} = 60^o$;

d) $\widehat{D} = 65^o$; $\widehat{A} = 130^o$.

9.22. Hãy cho biết số đo các góc của tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) trong mỗi trường hợp sau:

a) $\widehat{AOB} = 100^o$; $\widehat{BOC} = 120^o$; $\widehat{COD} = 70^o$.

b) $\widehat{BOC} = 110^o$; $\widehat{COD} = 70^o$; $\widehat{DOA} = 100^o$.

9.23. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O), hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại điểm E. Tính số đo các góc của tứ giác $ABCD$, biết rằng $\widehat{AEB} = 80^o$; $\widehat{ABE} = 70^o$ và $\widehat{ECB} = 50^o$.

9.24. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) sao cho hai tia AB và DC cắt nhau tại điểm K, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại điểm H. Kí hiệu $\overset{\frown}{AD}$ là cung AD không chứa B và $\overset{\frown}{BC}$ là cung BC không chứa A. Chứng minh rằng:

a) $\widehat{BKC} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{AD} - \text{sđ}\overset{\frown}{BC})$; b) $\widehat{BHC} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{AD} + \text{sđ}\overset{\frown}{BC})$.

9.25. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) sao cho hai tia AB và DC cắt nhau tại điểm I. Chứng minh rằng:

a) $\Delta IAD \backsim \Delta ICB$; $\Delta IAC \backsim \Delta IDB$; b) $\frac{IC}{ID} = \frac{AC}{AD} \cdot \frac{BC}{BD}$.

9.26. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O), hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại điểm J. Chứng minh rằng:

a) $\Delta JAD \backsim \Delta JBC$; $\Delta JAB \backsim \Delta JDC$; b) $\frac{JA}{JC} = \frac{BA}{BC} \cdot \frac{DA}{DC}$.

9.27. Chứng minh rằng:

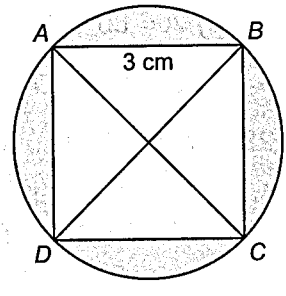
a) Nếu một hình bình hành nội tiếp một đường tròn thì hình đó phải là hình chữ nhật;

b) Nếu một hình thoi nội tiếp một đường tròn thì hình đó phải là hình vuông;

c) Nếu một hình thang nội tiếp một đường tròn thì hình đó phải là hình thang cân.

9.28. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 4 cm. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ nội tiếp một đường tròn và tìm bán kính, chu vi của đường tròn đó.

9.29. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 3 cm và nội tiếp đường tròn (O) như Hình 9.8. Tính tổng diện tích của bốn hình viên phân được giới hạn bởi các cạnh hình vuông (phần tô đậm trong hình).



Hình 9.8

9.30. Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 8$ cm, $BD = 4$ cm. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ nội tiếp một đường tròn và tìm bán kính của đường tròn đó.

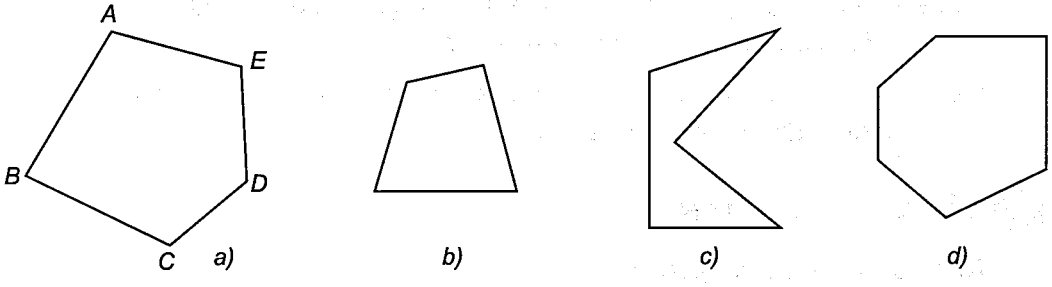
9.31. Cho hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) với $AB = 3$ cm; $AD = 4$ cm. Vẽ một hình vuông nội tiếp (O). Tính diện tích của hình vuông đó.

9.32. Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao BE, CF. Một đường tròn (O) đi qua hai điểm E, F và cắt các tia đối của hai tia BF, CE lần lượt tại X và Y. Chứng minh rằng XY song song với BC.

BÀI 30 ĐA GIÁC ĐỀU

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Những hình như dưới đây được gọi chung là các đa giác.



Hình 9.9

– Đa giác $ABCDE$ (Hình 9.9a) là những hình gồm năm đoạn thẳng AB, BC, CD, DE, EA, trong đó bất kì hai đoạn thẳng nào có một điểm chung cũng không cùng nằm trên một đường thẳng. Đa giác $ABCDE$ có năm đỉnh là các điểm A, B, C, D, E; năm cạnh là các đoạn thẳng AB, BC, CD, DE, EA và năm góc là các góc EAB, ABC, BCD, CDE, DEA.

– Nếu với một cạnh bất kì của đa giác, các đỉnh không thuộc cạnh đó đều nằm về một phía đối với đường thẳng chứa cạnh đó thì đa giác được gọi là đa giác lồi. Các đa giác trong Hình 9.9a, b, d là các đa giác lồi. Đa giác trong Hình 9.9c không phải đa giác lồi.

– Đa giác đều là một đa giác lồi có các cạnh bằng nhau và các góc bằng nhau.

– Các đỉnh của mỗi đa giác đều luôn cùng nằm trên một đường tròn, được gọi là đường tròn ngoại tiếp đa giác, tâm đường tròn được gọi là tâm của đa giác và đa giác được gọi là nội tiếp đường tròn đó.

2. Phép quay thuận chiều $\alpha^o (0^o < \alpha^o < 360^o)$ tâm O giữ nguyên điểm O, biến điểm A khác điểm O thành điểm B thuộc đường tròn $(O; OA)$ sao cho tia OA

quay thuận chiều quay của kim đồng hồ đến tia OB thì điểm A tạo nên cung AB có số đo α° (H.9.10a).



a) b)

Hình 9.10

– Định nghĩa tương tự cho phép quay ngược chiều α° tâm O (H.9.10b).

– Phép quay 0° và phép quay 360° giữ nguyên mọi điểm.

3. Một phép quay được gọi là giữ nguyên một đa giác đều $\mathcal{H}$ nếu phép quay đó biến mỗi điểm của $\mathcal{H}$ thành một điểm của $\mathcal{H}$.

– Nếu một phép quay biến các đỉnh của đa giác đều $\mathcal{H}$ thành các đỉnh của $\mathcal{H}$ thì phép quay đó giữ nguyên $\mathcal{H}$.

B KĨ NĂNG GIẢI TOÁN

– Nhận dạng được đa giác đều.

– Nhận biết được những hình phẳng có dạng đa giác đều trong tự nhiên, nghệ thuật, kiến trúc, công nghệ chế tạo.

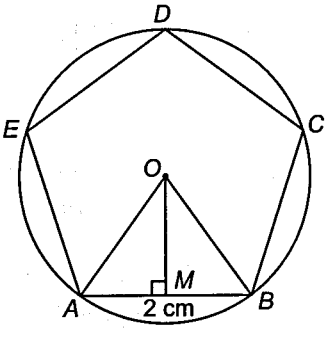
– Nhận biết được phép quay.

– Mô tả được các phép quay giữ nguyên hình đa giác đều.

Ví dụ Cho ngũ giác đều $ABCDE$ có cạnh bằng 2 cm nội tiếp một đường tròn (O).

a) Tính bán kính của (O), biết rằng ta lấy $\cos 54^\circ \approx 0{,}59$.

b) Liệt kê năm phép quay giữ nguyên ngũ giác đều $ABCDE$.



Hình 9.11

Giải (H.9.11)

a) Ta thấy các cung nhỏ sau thoả mãn:

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EA}.$$

Suy ra $\overset{\frown}{AOB} = \text{sđ}\overset{\frown}{AB} = \dfrac{360^\circ}{5} = 72^\circ$.

Gọi M là trung điểm của AB. Vì tam giác AOB cân tại O nên $OM \perp AB$ và OM là phân giác của $\widehat{AOB}$. Suy ra $\widehat{AOM} = \dfrac{\widehat{AOB}}{2} = \dfrac{72^o}{2} = 36^o$.

Như vậy, $\widehat{MAO} = 90^o - \widehat{AOM} = 54^o$.

Bán kính của đường tròn (O) là:

$$R = OA = \frac{AM}{\cos\widehat{MAO}} \approx \frac{2}{0,59} \approx 3,39 \text{ (cm)}.$$

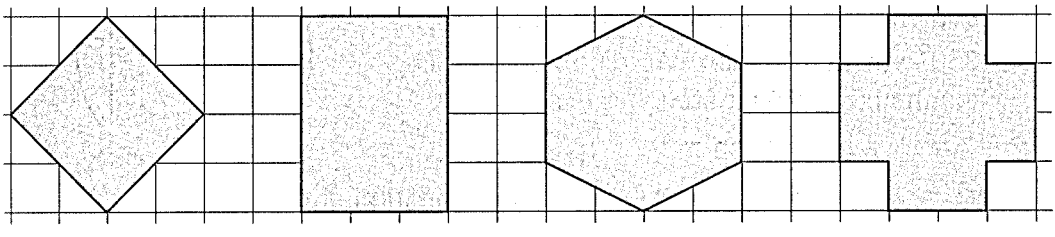
b) Các phép quay giữ nguyên ngũ giác đều là các phép quay thuận chiều lần lượt $72^o, 144^o, 216^o, 288^o, 360^o$ với tâm O.

BÀI TẬP

9.33. Những hình nào dưới đây là đa giác đều?

a) Tam giác đều;
b) Hình vuông;
c) Hình tròn;
d) Hình bình hành;
e) Hình chữ nhật;
f) Lục giác đều.

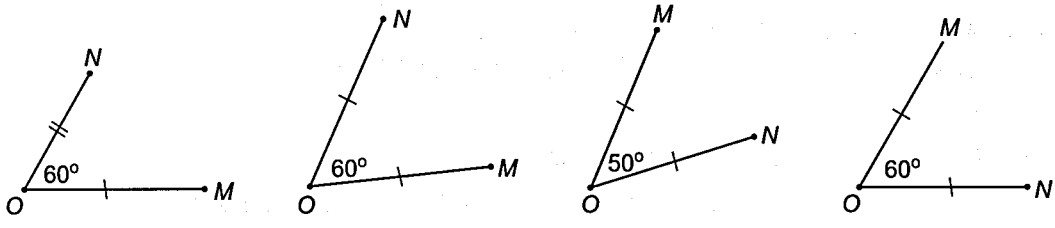
9.34. Hình phẳng nào dưới đây có dạng đa giác đều?



a) b) c) d)

Hình 9.12

9.35. Hình nào dưới đây vẽ hai điểm M, N thoả mãn phép quay ngược chiều 60^o tâm O biến N thành M?



a) b) c) d)

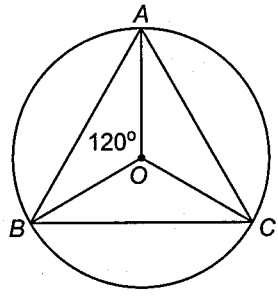
Hình 9.13

9.36. Cho lục giác đều *ABCDE* nội tiếp một đường tròn (*O*). Chứng minh rằng điểm *O* cách đều tất cả các cạnh của lục giác đều.

9.37. Cho một bát giác đều (đa giác đều có 8 cạnh) nội tiếp một đường tròn tâm *O*. Kẻ các đoạn thẳng nối *O* với các đỉnh của đa giác và chia đa giác thành 8 tam giác nhỏ cân tại đỉnh *O*. Ba góc của mỗi tam giác nhỏ có số đo bằng bao nhiêu?

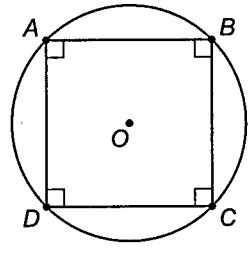
9.38. Cho *A', B', C', D', E', F'* là trung điểm các cạnh *AB, BC, CD, DE, EF, FA* của lục giác đều *ABCDEF*. Chứng minh rằng *A'B'C'D'E'F'* là một lục giác đều.

9.39. Cho tam giác đều *ABC* nội tiếp đường tròn (*O*) như Hình 9.14. Hãy cho biết các phép quay thuận chiều lần lượt 120^o; 240^o; 360^o với tâm *O* biến các đỉnh *A, B, C* thành những điểm nào.



Hình 9.14

9.40. Cho hình vuông *ABCD* nội tiếp đường tròn (*O*) như Hình 9.15. Hãy cho biết các phép quay ngược chiều lần lượt 90^o; 180^o; 270^o; 360^o với tâm *O* biến các đỉnh *A, B, C, D* thành những điểm nào.



Hình 9.15

9.41. Cho lục giác đều *ABCDEF* nội tiếp đường tròn tâm *O*.

a) Chứng tỏ *ACE* là tam giác đều.

b) Liệt kê ba phép quay giữ nguyên tam giác đều *ACE*.

c) Liệt kê sáu phép quay giữ nguyên lục giác đều *ABCDEF*.

9.42. Một phép quay thuận chiều 120^o tâm *O* biến điểm *A* thành điểm *B*, biến điểm *B* thành điểm *C*. Chứng tỏ rằng *ABC* là tam giác đều nội tiếp một đường tròn tâm *O*.

9.43. Cho *O* là trung điểm của đoạn thẳng *AB*.

a) Tìm một phép quay biến điểm *A* thành điểm *B* và biến điểm *B* thành điểm *A*.

b) Phép quay thuận chiều 90^o tâm *O* biến *A* thành *C* và biến *B* thành *D*. Chứng tỏ rằng *ACBD* là một hình vuông.

ÔN TẬP CHƯƠNG IX

A CÂU HỎI (Trắc nghiệm)

1. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp một đường tròn với $\widehat{A} = 70^\circ$, $\widehat{B} = 100^\circ$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\widehat{C} = 80^\circ$, $\widehat{D} = 110^\circ$.

B. $\widehat{C} = 110^\circ$, $\widehat{D} = 80^\circ$.

C. $\widehat{C} = 140^\circ$, $\widehat{D} = 200^\circ$.

D. $\widehat{C} = 200^\circ$, $\widehat{D} = 140^\circ$.

2. Xét trong một đường tròn, khẳng định nào dưới đây là **không đúng**?

A. Hai góc nội tiếp bằng nhau chắn hai cung bằng nhau.

B. Hai góc ở tâm bằng nhau chắn hai cung bằng nhau.

C. Góc nội tiếp có số đo bằng số đo góc ở tâm chắn cùng một cung.

D. Góc nội tiếp có số đo bằng nửa số đo của cung bị chắn.

3. Cho hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp (O) với $AB = 4$ cm, $BC = 3$ cm. Đường tròn (O) có bán kính là

A. $R = 2{,}5$ cm.

B. $R = 5$ cm.

C. $R = 1{,}5$ cm.

D. $R = 2$ cm.

B BÀI TẬP

9.44. Xét trong một đường tròn, những câu nào dưới đây là đúng?

a) Hai góc nội tiếp bằng nhau chắn hai cung bằng nhau.

b) Hai góc ở tâm bằng nhau chắn hai cung bằng nhau.

c) Góc ở tâm có số đo bằng số đo góc nội tiếp chắn cùng một cung.

d) Góc nội tiếp có số đo bằng số đo của cung bị chắn.

9.45. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tính số đo của các góc BOC, COA, AOB, biết rằng $\widehat{A} = 60^\circ$; $\widehat{B} = 70^\circ$.

9.46. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Đường tròn (I) tiếp xúc các cạnh BC, CA, AB tại D, E, F. Chứng tỏ rằng $IEAF$, $IFBD$, $IDCE$ là các tứ giác nội tiếp.

9.47. Cho tam giác đều ABC nội tiếp một đường tròn bán kính 4 cm. Hãy tính độ dài mỗi cạnh và bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.

9.48. Tính diện tích tam giác vuông cân, nội tiếp đường tròn bán kính 4 cm.

9.49. Cho tam giác ABC vuông tại A, có diện tích là 24 cm^2 và nội tiếp đường tròn có bán kính 5 cm. Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

9.50. Hãy cho biết số đo các góc còn lại của tứ giác nội tiếp $ABCD$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $\widehat{A} = 80^\circ; \widehat{D} = 100^\circ;$

b) $\widehat{B} = 80^\circ; \widehat{A} = 110^\circ;$

c) $\widehat{C} = 120^\circ; \widehat{B} = 60^\circ;$

d) $\widehat{D} = 65^\circ; \widehat{C} = 125^\circ.$

9.51. Cho tam giác nhọn ABC có đường cao AH. Các điểm M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB, AC. Chứng minh rằng $AM \cdot AB = AN \cdot AC$.

9.52. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) có các đường cao AD, BE, CF. Cho EF cắt BC tại K. Chứng minh rằng:

a) $KB \cdot KC = KE \cdot KF;$

b) $\dfrac{KB}{KC} = \dfrac{DB}{DC}.$

9.53. Cho một lục giác đều và một tam giác đều cùng nội tiếp một đường tròn. Biết rằng tam giác đều có cạnh bằng 3 cm. Tính chu vi và diện tích của hình lục giác đều đã cho.

9.54. Cho đa giác đều $\mathcal{H}$ có 12 cạnh, nội tiếp một đường tròn (O). Kẻ các đoạn thẳng nối O với các đỉnh của $\mathcal{H}$ và thu được 12 góc nhọn tại đỉnh O (không chồng lên nhau).

a) Chứng tỏ rằng mỗi góc nhọn này có số đo bằng 30°.

b) Hãy chỉ ra 12 phép quay giữ nguyên $\mathcal{H}$.

CHƯƠNG X

MỘT SỐ HÌNH KHỐI TRONG THỰC TIỄN

BÀI 31 HÌNH TRỤ VÀ HÌNH NÓN

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

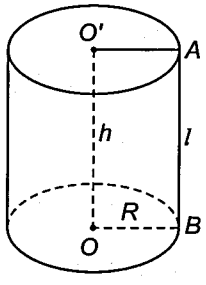
1. Hình trụ

- Một số yếu tố của hình trụ:

  Chiều cao: $h = O'O$

  Bán kính đáy: $R = OB$

  Đường sinh: $l = AB$.



- Công thức tính diện tích xung quanh của hình trụ: $S_{xq} = 2\pi Rh$, trong đó R là bán kính đáy, h là chiều cao.
- Công thức tính thể tích hình trụ: $V = S_{đáy} \cdot h = \pi R^2 h$, trong đó $S_{đáy}$ là diện tích đáy, R là bán kính đáy, h là chiều cao.

2. Hình nón

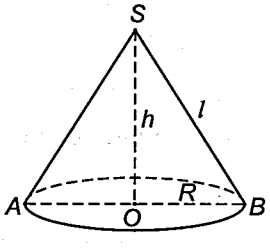
- Một số yếu tố của hình nón:

  Đỉnh: S

  Chiều cao: $h = SO$

  Đường sinh: $l = SA = SB$

  Bán kính đáy: $R = OB$.



- Công thức tính diện tích xung quanh của hình nón: $S_{xq} = \pi Rl$, trong đó R là bán kính đáy, l là độ dài đường sinh.

– Công thức tính thể tích hình nón: $V = \frac{1}{3}S_{đáy} \cdot h = \frac{1}{3}\pi R^2 h$, trong đó $S_{đáy}$ là diện tích đáy, R là bán kính đáy, h là chiều cao.

B KĨ NĂNG GIẢI TOÁN

– Chỉ ra được các yếu tố của hình trụ, hình nón.

– Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ, hình nón.

– Giải quyết một số vấn đề thực tiễn gắn với việc tính diện tích xung quanh, thể tích của hình trụ, hình nón.

Ví dụ 1 Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 4$ cm, $BC = 6$ cm. Quay hình chữ nhật quanh cạnh AB một vòng ta được một hình trụ. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ tạo thành.

Giải

Hình trụ tạo thành có bán kính $R = 6$ cm, $h = 4$ cm.

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 6 \cdot 4 = 48\pi$ (cm^2).

Thể tích của hình trụ là $V = \pi R^2 h = \pi \cdot 6^2 \cdot 4 = 144\pi$ (cm^3).

Ví dụ 2 Một hình trụ có bán kính đáy bằng 3 cm, thể tích bằng 45π cm^3.

a) Tính chiều cao của hình trụ.

b) Tính diện tích xung quanh của hình trụ (làm tròn đến hàng phần mười của cm^2).

Giải

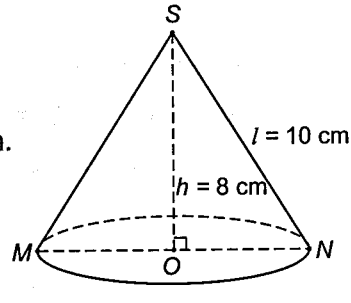
a) Ta có $V = \pi R^2 h$. Theo đề bài: $R = 3$ cm, $V = 45\pi$ cm^3 nên $\pi \cdot 3^2 \cdot h = 45\pi$. Suy ra $h = 5$ (cm).

b) Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 3 \cdot 5 = 30\pi \approx 94{,}2$ (cm^2).

Ví dụ 3 Một hình nón có chiều cao bằng 8 cm, độ dài đường sinh bằng 10 cm (H.10.1).

a) Tính bán kính đáy của hình nón.

b) Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình nón.



Hình 10.1

Giải

a) Tam giác SON vuông tại O nên theo định lí Pythagore ta có:

$$SO^2 + ON^2 = SN^2$$

$8^2 + ON^2 = 10^2$

$ON^2 = 100 - 64 = 36$

$ON = 6$ cm.

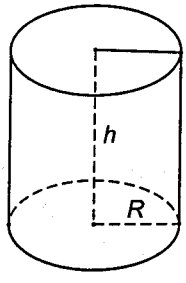
Vậy bán kính đáy của hình nón $R = 6$ cm.

b) Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq} = \pi Rl = \pi \cdot 6 \cdot 10 = 60\pi$ (cm^2).

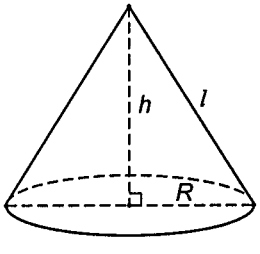
Thể tích của hình nón là $V = \frac{1}{3} S_{\text{đáy}} \cdot h = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 96\pi$ (cm^3).

BÀI TẬP

10.1. Thay dấu "?" bằng giá trị thích hợp và hoàn thành bảng sau vào vở:

Hình	Bán kính đáy (cm)	Chiều cao (cm)	Diện tích xung quanh (cm^2)	Thể tích (cm^3)
	5	4	?	?
	6	?	96π	?
	?	10	?	160π

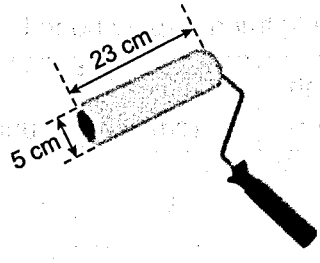
10.2. Thay dấu "?" bằng giá trị thích hợp và hoàn thành bảng sau vào vở:

Hình	Bán kính đáy (cm)	Chiều cao (cm)	Độ dài đường sinh (cm)	Diện tích xung quanh (cm^2)	Thể tích (cm^3)
	6	8	?	?	?
	?	?	13	65π	?

10.3. Bác Thu có một khối gỗ dạng hình trụ, chiều cao bằng 30 cm, đường kính đáy bằng 20 cm. Bác dự định sơn kín mặt ngoài của khối gỗ. Tính diện tích phần cần sơn (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của cm^2).

10.4. Bạn Trang làm một chiếc mũ sinh nhật bằng giấy bìa màu, đường kính đáy bằng 16 cm, độ dài đường sinh bằng 17 cm. Tính diện tích bìa màu bạn Trang cần dùng để làm chiếc mũ sinh nhật đó (coi mép dán không đáng kể, làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của cm^2).

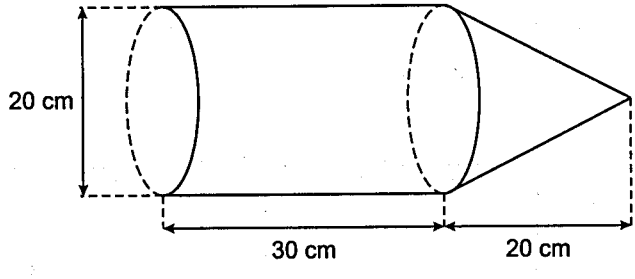
10.5. Một trục lăn sơn có dạng hình trụ, đường kính của đường tròn đáy bằng 5 cm, chiều dài bằng 23 cm (H.10.2). Sau khi lăn trọn vẹn liên tục 15 vòng thì diện tích phần sơn được trên mặt tường phẳng là bao nhiêu?



Hình 10.2

10.6. Một công ty sản xuất vỏ lon nước ngọt bằng nhôm có dạng hình trụ kín hai đáy với đường kính đáy bằng 6,4 cm và chiều cao bằng 12 cm. Chi phí để sản xuất vỏ lon là khoảng 100 000 đồng/m^2. Hỏi số tiền công ty đó phải chi để sản xuất 2 000 vỏ lon nước ngọt là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng nghìn của cm^2)?

10.7. Bác Khôi làm một dụng cụ bằng tôn gồm một phần có dạng hình trụ và một phần có dạng hình nón với các kích thước như Hình 10.3. Tính thể tích của dụng cụ này (coi mép hàn không đáng kể và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của cm^3).



Hình 10.3

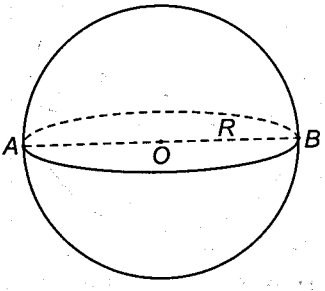
BÀI 32 HÌNH CẦU

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

– Một số yếu tố của mặt cầu:

Tâm mặt cầu: O

Bán kính mặt cầu: $R = OB$.



– Công thức tính diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu có bán kính R là $S = 4\pi R^2$; $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

B KĨ NĂNG GIẢI TOÁN

- Chỉ ra được các yếu tố của mặt cầu.
- Tính diện tích mặt cầu, thể tích hình cầu.
- Giải quyết một số vấn đề thực tiễn gắn với việc tính diện tích mặt cầu, thể tích hình cầu.

Ví dụ 1 Cho hình cầu có đường kính bằng 20 cm. Tính diện tích mặt cầu và thể tích của hình cầu đó.

Giải

Bán kính của hình cầu là $R = 20 : 2 = 10$ (cm).

Diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 4 \cdot \pi \cdot 10^2 = 400\pi$ (cm^2).

Thể tích của hình cầu là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 10^3 = \frac{4\,000\pi}{3}$ (cm^3).

Ví dụ 2 Khi cắt một hình cầu bởi một mặt phẳng đi qua tâm của hình cầu đó ta được một hình tròn có chu vi bằng 6π cm. Tính thể tích của hình cầu đó.

Giải

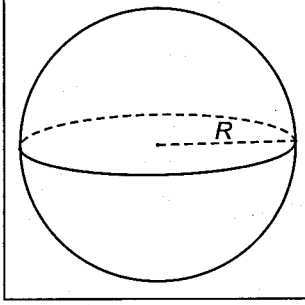
Gọi R là bán kính của hình cầu.

Theo đề bài, ta có: $2\pi R = 6\pi$ nên $R = 3$ cm.

Thể tích của hình cầu là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3 = 36\pi$ (cm^3).

BÀI TẬP

10.8. Thay dấu "?" bằng giá trị thích hợp và hoàn thành bảng sau vào vở:

Hình	Bán kính (cm)	Diện tích mặt cầu (cm^2)	Thể tích hình cầu (cm^3)
	9	?	?
	?	36π	?
	?	?	$\frac{256\pi}{3}$

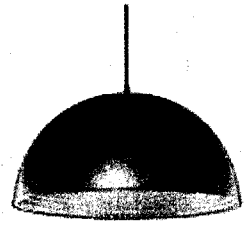
10.9. Cho một hình cầu có thể tích bằng 288π cm^3.

a) Tính bán kính của hình cầu.

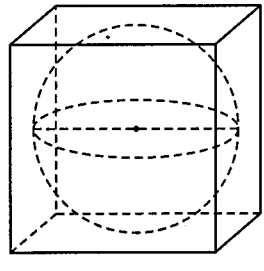
b) Tính diện tích mặt cầu.

10.10. Một quả bóng thám không (loại bóng bay mang theo các dụng cụ đo thời tiết) có dạng hình cầu với đường kính 20 cm. Hỏi diện tích bề mặt quả bóng là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của cm^2)?

10.11. Một chiếc chao đèn trang trí có dạng một nửa hình cầu có đường kính bằng 40 cm. Người ta cần sơn bề mặt bên ngoài của chao đèn. Giả sử chi phí sơn bề mặt khoảng 100 000 đồng/m^2. Hỏi chi phí sơn 1 000 chiếc chao đèn khoảng bao nhiêu tiền (làm tròn kết quả đến hàng nghìn)?

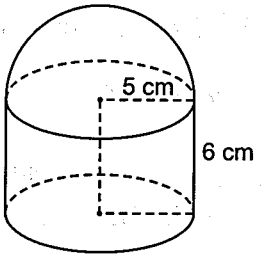


10.12. Một chiếc hộp hình lập phương có cạnh bằng 18 cm đựng vừa khít một quả bóng hình cầu (H.10.4). Tính thể tích của quả bóng (coi độ dày của hộp không đáng kể).



Hình 10.4

10.13. Một hộp đựng mĩ phẩm được thiết kế thân hộp có dạng hình trụ, nắp hộp có dạng nửa hình cầu với kích thước như Hình 10.5. Nếu sơn bên ngoài vỏ hộp (không sơn đáy) thì diện tích cần sơn là bao nhiêu?



Hình 10.5

ÔN TẬP CHƯƠNG X

A CÂU HỎI (Trắc nghiệm)

1. Gọi h, R lần lượt là độ dài của chiều cao và bán kính đáy của hình trụ. Diện tích xung quanh của hình trụ là

A. $S_{xq} = 2\pi Rh$. B. $S_{xq} = \pi Rh$. C. $S_{xq} = \pi Rl$. D. $S_{xq} = \pi R^2 h$.

2. Một hình trụ có bán kính đáy bằng 6 cm, chiều cao bằng 10 cm. Thể tích của hình trụ này là

A. $V = 300\pi$ (cm^3). B. $V = 320\pi$ (cm^3).

C. $V = 340\pi$ (cm^3). D. $V = 360\pi$ (cm^3).

3. Một hình trụ có chu vi của đường tròn đáy bằng $4\pi a$, chiều cao bằng a. Thể tích của hình trụ này là

A. $V = 2\pi a^3$. B. $V = 4\pi a^3$. C. $V = 16\pi a^3$. D. $V = \frac{4}{3}\pi a^3$.

4. Hình trụ có bán kính đáy bằng $2\sqrt{3}$ cm và thể tích bằng 24π cm^3. Chiều cao của hình trụ này là

A. $h = 2$ cm. B. $h = 6$ cm. C. $h = 2\sqrt{3}$ cm. D. $h = 1$ cm.

5. Gọi l, h, R lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính đáy của hình nón. Đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

A. $l^2 = h^2 + R^2$. B. $\frac{1}{l^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{R^2}$. C. $R^2 = h^2 + l^2$. D. $l^2 = hR$.

6. Gọi l, h, R lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính đáy của hình nón. Diện tích xung quanh của hình nón là

A. $S_{xq} = 2\pi Rl$. B. $S_{xq} = \pi Rh$. C. $S_{xq} = \pi Rl$. D. $S_{xq} = \pi R^2 h$.

7. Thể tích V của hình nón có chiều cao bằng a và độ dài đường sinh bằng $a\sqrt{5}$ là

A. $V = 4\pi a^3$. B. $V = \frac{4}{3}\pi a^3$. C. $V = \frac{2}{3}\pi a^3$. D. $V = \frac{5}{3}\pi a^3$.

8. Cho hình nón có diện tích xung quanh 25π cm^2, bán kính đường tròn đáy bằng 5 cm. Độ dài đường sinh của hình nón là

A. $l = 1$ cm. B. $l = \frac{5}{2}$ cm. C. $l = 5$ cm. D. $l = 3$ cm.

9. Gọi R là bán kính, S là diện tích mặt cầu và V là thể tích của hình cầu. Công thức nào sau đây là **sai**?

A. $3V = SR$. B. $S = 4\pi R^2$. C. $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. D. $S = \pi R^2$.

10. Một mặt cầu có diện tích 36π m^2. Thể tích của hình cầu này là

A. $V = \frac{4}{3}\pi$ m^3. B. $V = 36\pi$ m^3. C. $V = 72\pi$ m^3. D. $V = 108\pi$ m^3.

(B) BÀI TẬP

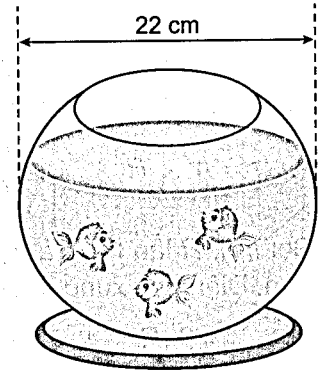
10.14. Một khối gỗ có dạng hình trụ, chiều cao bằng 50 cm, đường kính đáy bằng 30 cm.

a) Tính thể tích của khối gỗ.

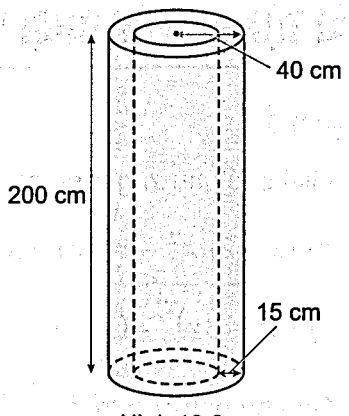
b) Nếu sơn phủ kín mặt bên ngoài khối gỗ thì diện tích cần sơn là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của cm^2)?

10.15. Một chiếc nón lá có dạng một hình nón không có đáy, đường kính đáy bằng 80 cm, chiều cao bằng 30 cm. Tính diện tích mặt ngoài của chiếc nón (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của cm^2).

10.16. Bạn Khôi có một chiếc bể cá làm bằng thuỷ tinh, có dạng hình cầu, đường kính 22 cm. Khi nuôi cá, Khôi thường đổ vào bể lượng nước có thể tích bằng $\frac{2}{3}$ thể tích của bể. Tính thể tích nước bạn Khôi đổ vào bể khi nuôi cá (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của cm^3).



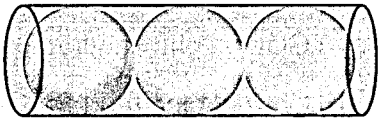
10.17. Người ta cần làm một ống thoát nước hình trụ bằng bê tông (H.10.6) có chiều cao là 200 cm, độ dày của thành ống là 15 cm, đường kính của ống là 80 cm. Tính lượng bê tông cần dùng để làm ống thoát nước nói trên.



Hình 10.6

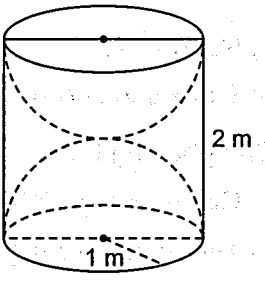
10.18. Một hộp đựng bóng bàn có dạng hình trụ chứa vừa khít 3 quả bóng bàn có cùng bán kính R xếp theo chiều ngang (H.10.7).

Gọi S_1 là tổng diện tích ba quả bóng bàn, S_2 là diện tích xung quanh của vỏ hộp hình trụ. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.



Hình 10.7

10.19. Một khối gỗ hình trụ tròn xoay có bán kính đáy bằng 1 m, chiều cao bằng 2 m. Người ta khoét từ hai đầu khối gỗ hai nửa hình cầu mà đường tròn đáy của khối gỗ là đường tròn lớn của mỗi nửa khối cầu (H.10.8). Tính tỉ số thể tích phần còn lại của khối gỗ và cả khối gỗ ban đầu.

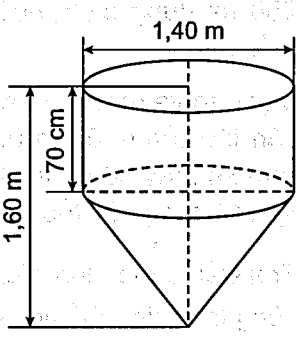


Hình 10.8

10.20. Một dụng cụ gồm một phần có dạng hình trụ và một phần có dạng hình nón với kích thước như Hình 10.9.

a) Tính thể tích của dụng cụ này.

b) Tính diện tích mặt ngoài của dụng cụ (không tính nắp đậy, kết quả làm tròn đến hàng phần mười của m^2).



Hình 10.9

BÀI TẬP ÔN TẬP CUỐI NĂM

ĐẠI SỐ

1. Giải các phương trình sau:

a) $(x+2)(x^2-x+3)=x^3+8$;

b) $\dfrac{11}{x}=\dfrac{9}{x+1}+\dfrac{2}{x-4}$;

c) $(x^2-3x)^2-(x-4)^2=0$.

2. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x+3y=1 \\ 2x+my=5. \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình với $m=1$.

b) Tìm các số nguyên m để hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$, với x, y đều là số nguyên.

3. a) Giải bất phương trình $-10x+7>3x-4$.

b) Chứng minh rằng $9a^2-6a\geq -1$ với mọi số thực a.

4. Cho biểu thức: $A=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{4\sqrt{x}-1}{x-4}\right):\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}$ $(x\geq 0, x\neq 4)$.

a) Rút gọn A.

b) Tìm x sao cho $A=1$.

5. Cho phương trình $x^2+4x+m=0$.

a) Giải phương trình với $m=1$.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1^2+x_2^2=10$.

6. Nếu trộn dung dịch muối nồng độ 10% với dung dịch muối nồng độ 60% để được 250 ml dung dịch muối nồng độ 40% thì cần lấy bao nhiêu mililít dung dịch mỗi loại?

7. Một ô tô và một xe máy cùng khởi hành từ địa điểm A và đi đến địa điểm B. Do vận tốc của ô tô lớn hơn vận tốc của xe máy là 20 km/h nên ô tô đến B sớm hơn xe máy 30 phút. Biết quãng đường AB dài 60 km, tính vận tốc của mỗi xe (giả sử rằng vận tốc của mỗi xe là không đổi trên toàn bộ quãng đường AB).

8. Trái Đất là một quả cầu khổng lồ có thể tích khoảng $1086,23\cdot 10^9\ \text{km}^3$. Sử dụng công thức tính thể tích hình cầu, hãy cho biết chiều dài đường xích đạo Trái Đất dài khoảng bao nhiêu kilômét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của km)?

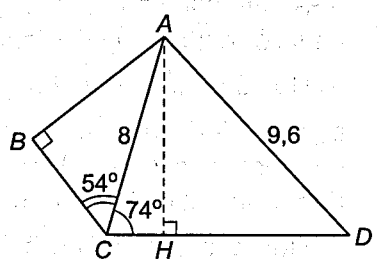
9. Trong hình bên, cho $AC = 8$ cm, $AD = 9{,}6$ cm, $\widehat{ABC} = 90^\circ$, $\widehat{ACB} = 54^\circ$ và $\widehat{ACD} = 74^\circ$.

Hãy tính :

a) AB (làm tròn đến hàng phần nghìn của cm);

b) $\widehat{ADC}$ (làm tròn đến phút).

(Gợi ý: Kẻ đường cao AH của tam giác ACD).



10. Một chiếc thuyền đi với vận tốc 2 km/h vượt qua một khúc sông nước chảy mạnh mất 5 phút. Biết rằng đường đi của thuyền tạo với bờ một góc 70°. Tính chiều rộng của khúc sông (làm tròn đến hàng đơn vị của mét).

11. Cho hai tiếp tuyến MA và MB của đường tròn (O). Gọi N là điểm sao cho $MANB$ là một hình bình hành.

a) Giả sử N không nằm trên (O), NA và NB cắt (O) lần lượt tại D và C.

– Chứng minh rằng ABC là tam giác cân tại đỉnh A.

– Chứng minh rằng hai cung BC và AD có số đo bằng nhau.

b) Giả sử N nằm trên (O).

– Chứng minh rằng MAB là tam giác đều.

– Tính độ dài cung AB và diện tích của hình quạt tròn ứng với cung AB, biết rằng đường tròn (O) có bán kính bằng 6 cm.

12. Cho tam giác nhọn ABC và điểm D nằm giữa B và C. Gọi E và F lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ D xuống AB và AC.

a) Gọi I và J lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác EBD và tam giác FDC. Chứng minh rằng hai đường tròn (I) và (J) tiếp xúc ngoài với nhau.

b) Giả sử M là một điểm tuỳ ý khác F, nằm giữa A và C; gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MDC. Chứng minh rằng hai đường tròn (I) và (K) cắt nhau.

13. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Ba đường cao AD, BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại H. Gọi AK là đường kính của (O). Chứng minh rằng:

a) $BH = CK$, $CH = BK$;

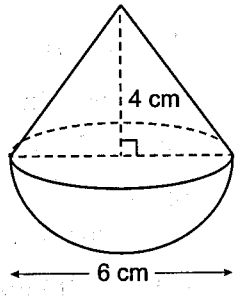
b) $AD \cdot AK = AB \cdot AC$.

14. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), vẽ $AX \perp BC$ và cắt nhau tại điểm D. Cho điểm H trên đoạn thẳng AD sao cho $DH = DX$. Cho BH cắt AC tại E và CH cắt AB tại F.

a) Chứng minh rằng H là trực tâm của tam giác ABC.

b) Chứng minh rằng H là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

15. Một vật thể bằng kim loại gồm có một hình nón và một nửa hình cầu có chung đáy. Hình nón có chiều cao 4 cm và đường kính đáy là 6 cm.



a) Hãy tìm thể tích và tổng diện tích bề mặt của vật thể.

b) Vật thể được nấu chảy và đúc lại thành một hình trụ có chiều cao 4 cm. Tìm bán kính đáy của hình trụ đó (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của cm).

c) Nếu cần sơn 1 000 hình trụ như ở câu b và mỗi hộp sơn có thể dùng để sơn một diện tích 5 m^2 thì cần bao nhiêu hộp sơn (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của cm^2)?

THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

16. Trong buổi tổng kết năm học, lớp 9C đã thực hiện bình chọn cho danh hiệu "Tổ học tập tích cực nhất của lớp" và thu được kết quả như sau:

Tổ	1	2	3	4
Số bình chọn	15	10	12	3

a) Lập bảng tần số tương đối.

b) Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số thu được.

17. Bảng sau đây cho biết cơ cấu theo độ tuổi của công nhân trong một công ty may mặc:

Độ tuổi	[18; 28)	[28; 38)	[38; 48)	[48; 58)
Số công nhân	150	400	200	50

a) Lập bảng tần số tương đối ghép nhóm cho bảng dữ liệu trên.

b) Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm thu được.

18. Một đoàn tàu có 4 toa A, B, C, D đỗ ở một sân ga. Trên sân ga có hai hành khách không quen biết nhau. Từ sân ga, mỗi người chọn ngẫu nhiên một toa tàu để bước lên. Kí hiệu hai hành khách là 1 và 2. Mỗi kết quả có thể là một cặp (X, Y), trong đó X, Y tương ứng là toa tàu mà hành khách số 1 và hành khách số 2 bước lên.

a) Có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra? Chúng có đồng khả năng không? Tại sao?

b) Mô tả không gian mẫu.

c) Tính xác suất của các biến cố sau:

+ E: "Hai hành khách này ở cùng một toa tàu";

+ F: "Cả hai hành khách đều không lên toa tàu B".

CHƯƠNG VI. HÀM SỐ $y = ax^2 (a \neq 0)$. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

BÀI 18. HÀM SỐ $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

6.1. a) Công thức tính thể tích của hình lăng trụ là: $V = S_{đáy} \cdot h = 5a^2$ (cm^3).

Thể tích của hình lăng trụ là 180 cm^3 và chiều cao 5 cm nên ta có

$$a^2 = \frac{180}{5} = 36.$$

Suy ra $a = 6$ (cm).

Vậy độ dài cạnh đáy của hình lăng trụ khi thể tích của nó bằng 180 cm^3 là 6 cm.

b) Nếu độ dài cạnh a của hình vuông đáy tăng lên hai lần, tức là bằng $2a$, thì thể tích V' của hình lăng trụ là:

$V' = 5 \cdot (2a)^2 = 20a^2 = 4V$, tức là thể tích của hình lăng trụ tăng lên bốn lần.

6.2. a) Theo đề bài, khối lượng mà mỗi dây cáp có thể chịu được là $w = 8d^2$ (tấn).

Mà cây cầu treo có 21 dây cáp, mỗi dây cáp có đường kính $d = 9$ inch nên khối lượng tối đa mà cây cầu treo có thể chịu đựng là:

$$21 \cdot 8d^2 = 168d^2 = 168 \cdot 9^2 = 13\,608 \text{ (tấn)}.$$

b) Muốn cây cầu treo chịu được khối lượng 15 162 tấn, ta giải phương trình sau để tìm đường kính d của dây cáp:

$$15\,162 = 168d^2.$$

Suy ra $d = \sqrt{\frac{15162}{168}} = 9{,}5$ (inch).

Vậy với đường kính của mỗi dây cáp là 9,5 inch thì cây cầu treo sẽ chịu được khối lượng 15 162 tấn.

6.3. a) Thay $v = 2$ m/s, $F = 120$ N vào công thức $F = av^2$, ta được $a = 30$.

Vậy $F = 30v^2$ (N).

b) Khi $v = 15$ m/s, ta có $F = 30v^2 = 30 \cdot 15^2 = 6\,750$ (N).

c) Đổi: $v = 90$ km/h $= 25$ m/s.

Khi đó, lực thổi tương ứng của gió là:

$$F = 30v^2 = 30 \cdot 25^2 = 18\,750 \text{ (N)}.$$

Mà cánh buồm chỉ chịu được áp lực tối đa là 12 000 N nên chiếc thuyền không thể đi trong gió bão với tốc độ gió 90 km/h.

6.4. a) Đồ thị của hàm số đi qua điểm $A\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$ nên ta có $a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{2}$.

Suy ra $a = -6$.

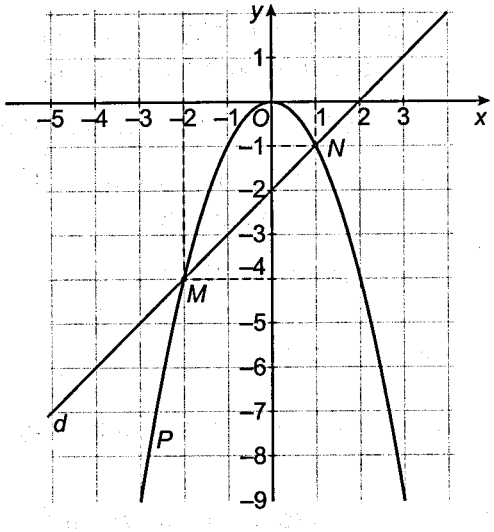
b) Đồ thị của hàm số đi qua điểm $B\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ nên ta có $a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Suy ra $a = \sqrt{3}$.

6.5. a) Đồ thị của hàm số $y = -2x^2$ là đường y_1.

b) Đồ thị hàm số $y = 2x^2$ là đường y_3; còn đồ thị hàm $y = x^2$ là đường y_2.

6.6. Trong cùng mặt phẳng toạ độ Oxy, ta vẽ đường thẳng (d): $y = x - 2$ và parabol (P): $y = -x^2$ như hình dưới đây:

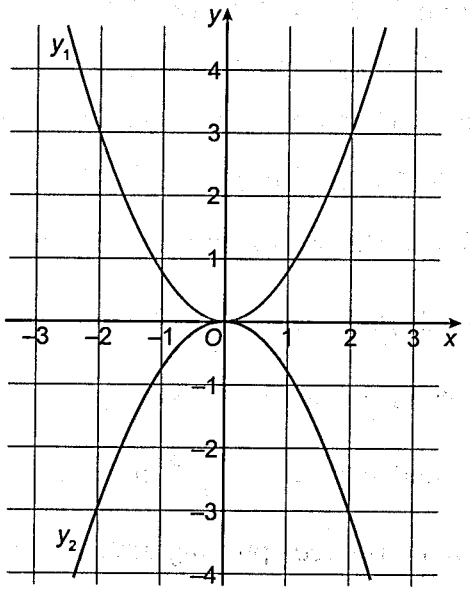


Nhìn vào hình vẽ, ta thấy (d) cắt (P) tại hai điểm $M(-2;-4)$ và $N(1;-1)$.

6.7. Ta lập bảng giá trị của hai hàm số $y = 0{,}75x^2$ và $y = -0{,}75x^2$.

x	-2	-1	0	1	2
$y = 0{,}75x^2$	3	0,75	0	0,75	3
$y = -0{,}75x^2$	-3	$-0{,}75$	0	$-0{,}75$	-3

Từ đó ta vẽ được đồ thị của hai hàm số này như hình dưới đây:



Ta có nhận xét rằng hai đồ thị này đối xứng với nhau qua trục hoành Ox.

6.8. a) Giả sử $(x_0;y_0)$ là một điểm trên đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^2$. Khi đó, ta có $y_0 = ax_0^2$.

Ta cần chứng minh điểm $(-x_0;y_0)$ cũng nằm trên đồ thị hàm số. Thật vậy, ta có:

$$y_0 = ax_0^2 = a \cdot (-x_0)^2.$$

Điều này chứng tỏ rằng điểm $(-x_0; y_0)$ cũng nằm trên đồ thị hàm số.

b) Với hàm số $y = f(x) = ax^2$, ta có với mọi $x \in \mathbb{R}$:

$$f(-x) = a(-x)^2 = ax^2 = f(x).$$

Do đó $f(-x) = f(x)$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

BÀI 19. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

6.9. a) Đưa phương trình đã cho về dạng $x(x+5)=0$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x_1=0$ hoặc $x_2=-5$.

b) Đưa phương trình đã cho về dạng $(x-4)(x+4)=0$.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x_1=4$ hoặc $x_2=-4$.

c) Đưa phương trình đã cho về dạng $(x-5)^2=0$.

Vậy phương trình có nghiệm kép là $x_1=x_2=5$.

d) Đưa phương trình đã cho về dạng $(x+2)(x+6)=0$.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x_1=-2$ hoặc $x_2=-6$.

6.10. a) Từ phương trình đã cho suy ra $2x+1=\sqrt{3}$ hoặc $2x+1=-\sqrt{3}$.

Ta tính được hai nghiệm là $x_1=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ hoặc $x_2=\dfrac{-\sqrt{3}-1}{2}$.

b) Từ phương trình đã cho suy ra $2-3x=\sqrt{5}$ hoặc $2-3x=-\sqrt{5}$.

Ta tính được hai nghiệm là $x_1=\dfrac{2-\sqrt{5}}{3}$ hoặc $x_2=\dfrac{2+\sqrt{5}}{3}$.

6.11. Áp dụng công thức nghiệm của phương trình bậc hai.

a) Ta có: $\Delta=4-4\cdot(-5)\cdot 1=24>0$; $\sqrt{\Delta}=2\sqrt{6}$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt là: $x_1=\dfrac{-2+2\sqrt{6}}{2}=-1+\sqrt{6}$

và $x_2=-1-\sqrt{6}$.

b) Ta có: $\Delta=48-4\cdot 4\cdot 3=0$.

Suy ra phương trình có nghiệm kép là: $x_1=x_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

c) Ta có: $\Delta=180-28=152>0$; $\sqrt{\Delta}=2\sqrt{38}$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt là:

$$x_1=\frac{6\sqrt{5}+2\sqrt{38}}{2}=3\sqrt{5}+\sqrt{38};\ x_2=3\sqrt{5}-\sqrt{38}.$$

Chú ý. Trong các câu a, b và c ở trên, ta cũng có thể sử dụng công thức nghiệm thu gọn để lời giải ngắn gọn hơn.

6.12. a) $x_1 = \dfrac{\sqrt{19} - \sqrt{11}}{4}$; $x_2 = \dfrac{-\sqrt{19} - \sqrt{11}}{4}$.

b) Phương trình vô nghiệm.

c) Phương trình vô nghiệm.

6.13. Ta xét các trường hợp sau của m:

– Trường hợp 1: Nếu $m < 0$ thì phương trình vô nghiệm (vì vế trái không âm, vế phải âm).

– Trường hợp 2: Nếu $m = 0$ thì suy ra $(2x - 1)^2 = 0$. Do đó phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{1}{2}$.

– Trường hợp 3: Nếu $m > 0$ thì suy ra $2x - 1 = \sqrt{m}$ hoặc $2x - 1 = -\sqrt{m}$.

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{m}}{2}$ hoặc $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{m}}{2}$.

6.14. Xét phương trình: $x^2 + 4(m+1)x + 4m^2 - 3 = 0$. (*)

a) Ta có: $\Delta' = 4(m^2 + 2m + 1) - 4m^2 + 3 = 8m + 7$.

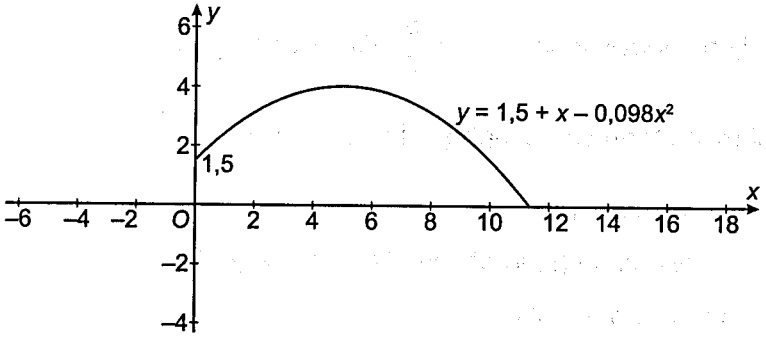
b) Ta có:

– Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta' > 0$, tức là khi $m > -\dfrac{7}{8}$.

– Phương trình (*) có nghiệm kép khi $\Delta' = 0$, tức là khi $m = -\dfrac{7}{8}$.

– Phương trình (*) vô nghiệm khi $\Delta' < 0$, tức là khi $m < -\dfrac{7}{8}$.

6.15.



Theo đề bài, phương trình quỹ đạo chuyển động là $y = -0{,}098x^2 + x + 1{,}5$.

Vật chạm đất khi $y = 0$, do đó ta có phương trình: $-0,098x^2 + x + 1,5 = 0$.

Ta có: $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1,5 \cdot (-0,098) = 1,588$.

Nghiệm dương của phương trình là $x = \dfrac{-1 - \sqrt{1,588}}{2 \cdot (-0,098)} \approx 11,53$.

Vậy khoảng cách theo phương ngang từ vị trí ném bóng đến vị trí quả bóng chạm đất là khoảng 11,53 m.

6.16. a) Từ công thức Doyle, thay $L = 16$ vào ta được $B = D^2 - 8D + 16$.

b) Ta tìm nghiệm phương trình bậc hai ẩn D: $D^2 - 8D + 16 = 0$.

Ta có: $\Delta = 64 - 64 = 0$.

Vậy phương trình có nghiệm kép $D = \dfrac{8}{2} = 4$.

BÀI 20. ĐỊNH LÍ VIÈTE VÀ ỨNG DỤNG

6.17. a) Ta có: $a + b + c = \sqrt{3} + (-\sqrt{3} - 1) + 1 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm là:

$$x_1 = 1 \text{ và } x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

b) Ta có: $a - b + c = 3 - (\sqrt{5} - 1) + (-4) + \sqrt{5} = 0$ nên phương trình có hai nghiệm là:

$$x_1 = -1 \text{ và } x_2 = -\frac{c}{a} = \frac{4 - \sqrt{5}}{3}.$$

c) Giả sử $x_1 = \sqrt{5}$ là một nghiệm của phương trình. Gọi x_2 là nghiệm còn lại của phương trình.

Theo định lí Viète ta có: $x_1 x_2 = \dfrac{5}{2}$ nên suy ra $x_2 = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x_1 = \sqrt{5}; x_2 = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

6.18. a) $u + v = 17, uv = 72$.

Ta được hai cặp số $(u; v)$ cần tìm là (9; 8) và (8; 9).

b) $u^2 + v^2 = 73, uv = 24$.

Từ phương trình $u^2 + v^2 = 73$ ta suy ra $(u + v)^2 - 2uv = 73$.

Do đó $(u+v)^2 = 73 + 2\cdot 24 = 121 = 11^2$.

Từ đây ta được $u+v=11$ hoặc $u+v=-11$.

Trường hợp 1: $u+v=11$.

Suy ra $u=11-v$. Ta thay vào phương trình $uv=24$ để quy về giải phương trình ẩn v:

$$(11-v)v=24, \text{ hay } v^2-11v+24=0.$$

Phương trình này có nghiệm là $v=3$ hoặc $v=8$, từ đó suy ra $u=8$ hoặc $u=3$.

Trường hợp 2: $u+v=-11$.

Suy ra $u=-11-v$. Ta thay vào phương trình $uv=24$ để quy về giải phương trình ẩn v:

$$(-11-v)v=24, \text{ hay } v^2+11v+24=0.$$

Phương trình này có nghiệm là $v=-3$ hoặc $v=-8$, từ đó suy ra $u=-8$ hoặc $u=-3$.

Vậy kết hợp hai trường hợp trên ta được các cặp (u, v) thoả mãn đề bài là:

$$(u;v) \in \{(8;3),(3;8),(-8;-3),(-3;-8)\}.$$

6.19. a) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình đã cho. Theo định lí Viète, ta có:

$$x_1+x_2=8, x_1x_2=15.$$

Khi đó $(x_1;x_2) \in \{(3;5),(5;3)\}$.

Vậy hai nghiệm của phương trình đã cho là $x=3$ và $x=5$.

b) Giải tương tự câu a, ta được hai nghiệm của phương trình đã cho là $x=-2$ và $x=-3$.

6.20. a) Phương trình đã cho có nghiệm khi $\Delta = 16-4(m-2) = 24-4m \geq 0$.

Từ đây suy ra $m \leq 6$.

Vậy với $m \leq 6$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

b) Theo định lí Viète, ta có: $x_1+x_2=4$, $x_1x_2=m-2$.

Do đó:

$A = x_1^2+x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4^2 - 2(m-2) = 20-2m;$

$B = x_1^3+x_2^3 = (x_1+x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1+x_2) = 4^3 - 3\cdot 4\cdot (m-2) = 88-12m.$

6.21. *Cách 1*: Ta có:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\frac{b}{c};\ \frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_1x_2}=\frac{1}{\frac{c}{a}}=\frac{a}{c}.$$

Vậy $\frac{1}{x_1}$ và $\frac{1}{x_2}$ là hai nghiệm của phương trình bậc hai:

$$y^2+\frac{b}{c}y+\frac{a}{c}=0 \text{ hay } cy^2+by+a=0.$$

Cách 2: Đặt $y=\frac{1}{x}$ và thay $x=\frac{1}{y}$ vào phương trình bậc hai đã cho, ta được:

$$a\left(\frac{1}{y}\right)^2+b\left(\frac{1}{y}\right)+c=0 \text{ hay } cy^2+by+a=0.$$

Vậy phương trình bậc hai cần tìm là $cy^2+by+a=0$ $(c\neq 0)$.

6.22. Sử dụng định lí Viète, ta có:

$$a(x-x_1)(x-x_2)=a\left[x^2-x(x_1+x_2)+x_1x_2\right]=a\left[x^2-\left(-\frac{b}{a}\right)x+\frac{c}{a}\right]$$

$$=ax^2+bx+c.$$

Đây là điều phải chứng minh.

a) Vì $a+b+c=2+(-9)+7=0$ nên phương trình $2x^2-9x+7=0$ có hai nghiệm là $x_1=1, x_2=\frac{c}{a}=\frac{7}{2}$. Do đó $2x^2-9x+7=2(x-1)\left(x-\frac{7}{2}\right)$.

b) Vì $a-b+c=4-(\sqrt{2}-3)+(-7+\sqrt{2})=0$ nên phương trình $4x^2+(\sqrt{2}-3)x-7+\sqrt{2}=0$ có hai nghiệm là $x_1=-1$, $x_2=-\frac{c}{a}=\frac{7-\sqrt{2}}{4}$.

Do đó $4x^2+(\sqrt{2}-3)x-7+\sqrt{2}=4(x+1)\left(x+\frac{\sqrt{2}-7}{4}\right)$.

6.23. Phương trình $x^2+4x+m=0$ có nghiệm khi $\Delta'=4-m\geq 0$. Suy ra $m\leq 4$.

Khi đó, gọi hai nghiệm của phương trình này là x_1, x_2. Theo định lí Viète, ta có:

$x_1+x_2=-4$ và $x_1x_2=m$.

Theo đề bài, ta có:

$$x_1^2 + x_2^2 = 10;$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10.$$

Thay $x_1 + x_2 = -4$ và $x_1x_2 = m$, ta được: $16 - 2m = 10$.

Suy ra $m = 3$ (thoả mãn điều kiện có nghiệm $m \le 4$).

Vậy với $m = 3$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn yêu cầu của đề bài.

6.24. Gọi chiều rộng và chiều dài của mảnh vườn lần lượt là x (m) và y (m).

Điều kiện: $0 < x < y$.

a) Theo đề bài, diện tích của mảnh vườn là 108 m^2 nên ta có $xy = 108$.

Theo đề bài, bác Long dùng 48 mét lưới thép để rào quanh mảnh vườn nên tổng chiều dài và chiều rộng là $2(x + y) = 48$ hay $x + y = 24$.

Do đó, x và y là hai nghiệm của phương trình bậc hai: $X^2 - 24X + 108 = 0$.

Ta có: $\Delta' = (-12)^2 - 108 = 36$, $\sqrt{\Delta'} = 6$.

Áp dụng công thức nghiệm ta được:

$X_1 = \dfrac{12 + 6}{1} = 18$ (thoả mãn); $X_2 = \dfrac{12 - 6}{1} = 6$ (thoả mãn).

Từ đó ta được $x = 6$ (m) và $y = 18$ (m).

Vậy chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn là 18 m và 6 m.

b) Gọi S (m^2) là diện tích của mảnh vườn hình chữ nhật mà bác Long có thể rào được.

Ta có: $x + y = 24$ và $xy = S$.

Do đó, x và y là hai nghiệm của phương trình bậc hai: $X^2 - 24X + S = 0$.

Phương trình này có nghiệm khi $\Delta' = (-12)^2 - S = 144 - S \ge 0$, suy ra $S \le 144$.

Khi $S = 144$ thì phương trình trên có nghiệm kép $X_1 = X_2 = 12$. Do đó $x = y = 12$.

Vậy diện tích lớn nhất của mảnh vườn mà bác Long có thể rào là 144 m^2 (khi đó mảnh vườn là hình vuông có cạnh 12 m).

BÀI 21. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

6.25. Gọi độ dài của đoạn tăng thêm ở cả chiều dài và chiều rộng của bức ảnh là h (cm). Điều kiện: $h > 0$.

Theo đề bài, diện tích ban đầu của bức ảnh là: $8 \cdot 12 = 96$ (cm^2).

Sau khi bức ảnh được phóng to, ta có phương trình:

$$(8 + h)(12 + h) = 96 \cdot 2 = 192 \text{ hay } h^2 + 20h - 96 = 0.$$

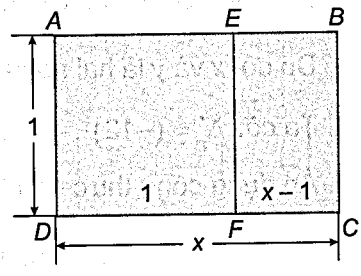
Ta có: $\Delta' = (-10)^2 - 1 \cdot (-96) = 196, \sqrt{\Delta'} = 14.$

Phương trình có hai nghiệm: $h_1 = \dfrac{-10 + 14}{1} = 4$ (thoả mãn điều kiện) và

$h_2 = \dfrac{-10 - 14}{1} = -24 < 0$ (không thoả mãn điều kiện).

Vậy chiều dài và chiều rộng của bức ảnh mới lần lượt là 16 cm và 12 cm.

6.26. a) Để đơn giản, ta giả sử hình chữ nhật $ABCD$ có chiều rộng $AD = BC = 1$ (cm) và chiều dài $AB = DC = x$ (cm). Điều kiện: $x > 1$.



Do đó tỉ số giữa chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật $ABCD$ là $\dfrac{x}{1}$.

Từ hình vẽ ta thấy chiều dài của hình chữ nhật $EBCF$ là $AD = EF = 1$ (cm) và chiều rộng là $EB = FC = x - 1$ (cm).

Do đó tỉ số giữa chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật $EBCF$ là $\dfrac{1}{x-1}$.

b) Theo đề bài, ta có phương trình: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{1}{x-1}$.

Nhân hai vế của phương trình này với $(x - 1)$ để khử mẫu ta được:

$$x(x - 1) = 1, \text{ hay } x^2 - x - 1 = 0.$$

Ta có: $\Delta = 1 - 4 \cdot (-1) = 5 > 0.$

Phương trình có hai nghiệm: $x_1 = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (thoả mãn) và $x_2 = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ (loại).

Vậy tỉ lệ vàng là $x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

6.27. Gọi vận tốc của máy bay đi về hướng đông là x (dặm/giờ). Điều kiện: $x > 0$.

Vận tốc của máy bay đi về hướng bắc là $x + 50$ (dặm/giờ).

Sau 3 giờ hai máy bay cách nhau 2 440 dặm nên ta có phương trình:

$$(3x)^2 + \left[3(x+50)\right]^2 = 2440^2$$

$$18x^2 + 900x - 5\,931100 = 0$$

$$9x^2 + 450x - 2\,965\,550 = 0.$$

Ta có: $\Delta' = (-225)^2 - 9 \cdot (-2\,965\,550) = 26\,740\,575$, $\sqrt{\Delta'} \approx 5\,171{,}13$.

Phương trình có hai nghiệm: $x_1 \approx \dfrac{-225 + 5\,171{,}13}{9} = 549{,}57$ (thoả mãn) và

$x_2 \approx \dfrac{-225 - 5\,171{,}13}{9} < 0$ (loại).

Vậy vận tốc của máy bay đi về hướng đông là khoảng 549,57 dặm/giờ và vận tốc của máy bay đi về hướng bắc là khoảng 599,57 dặm/giờ.

6.28. Gọi số dãy ghế trong phòng họp lúc đầu là x (dãy). Điều kiện: $x > 0$; x là ước của 40.

Số chỗ ngồi ở mỗi dãy ghế lúc ban đầu là $\dfrac{40}{x}$ (chỗ ngồi).

Số chỗ ngồi ở mỗi dãy ghế sau khi kê thêm một dãy ghế là $\dfrac{55}{x+1}$ (chỗ ngồi).

Theo đề bài, ta có phương trình:

$$\frac{55}{x+1} - \frac{40}{x} = 1.$$

Nhân cả hai vế của phương trình với $x(x+1)$ để khử mẫu, ta được:

$$55x - 40(x+1) = x(x+1)$$

$$x^2 - 14x + 40 = 0.$$

Giải phương trình này ta được hai nghiệm là $x_1 = 10$; $x_2 = 4$.

Cả hai nghiệm này đều thoả mãn điều kiện.

Vậy có hai trường hợp đối với phòng họp lúc đầu:

- Có 4 dãy ghế, mỗi dãy có 10 chỗ ngồi;
- Có 10 dãy ghế, mỗi dãy có 4 chỗ ngồi.

6.29. Đổi: $2\frac{2}{5}$ giờ = $\frac{12}{5}$ giờ.

Gọi x (giờ) là thời gian mà Hùng cần để dọn xong nhà khi làm một mình. Điều kiện: $0 < x < 5$ (vì Hùng làm nhanh hơn Nam, mà hai anh em cùng dọn thì hết 10 giờ nên suy ra thời gian làm riêng của Hùng sẽ nhỏ hơn 5 giờ).

Thời gian mà Nam cần để dọn xong nhà khi làm một mình là $(10 - x)$ (giờ).

Ta coi việc dọn nhà mà Hùng và Nam phải làm xong là 1 (công việc).

Trong 1 giờ Hùng làm được $\frac{1}{x}$ (công việc).

Trong 1 giờ Nam làm được $\frac{1}{10-x}$ (công việc).

Suy ra trong 1 giờ, cả Hùng và Nam sẽ làm được $\frac{1}{x} + \frac{1}{10-x}$ (công việc).

Mặt khác, cả hai anh em cùng làm thì dọn xong nhà trong $\frac{12}{5}$ giờ nên trong 1 giờ hai anh em làm được:

$$1 : \frac{12}{5} = \frac{5}{12} \text{ (công việc).}$$

Theo đề bài, ta có phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{10-x} = \frac{5}{12}.$$

Nhân cả hai vế của phương trình này với $12x(10 - x)$ để khử mẫu, ta được:

$$12(10 - x) + 12x = 5x(10 - x)$$

$$5x^2 - 50x + 120 = 0$$

$$x^2 - 10x + 24 = 0.$$

Phương trình này có hai nghiệm là $x_1 = 4$ (thoả mãn); $x_2 = 6 > 5$ (loại).

Vậy Hùng cần 4 giờ và Nam cần 6 giờ để dọn xong nhà khi làm một mình.

6.30. Gọi độ dài cạnh của hình vuông cắt ra là x (cm). Điều kiện: $0 < x < 15$.

Sau khi cắt bốn hình vuông ở bốn góc và gập lên để được một hình hộp chữ nhật (không có nắp) thì đáy của hình hộp chữ nhật này có chiều rộng là $(30 - 2x)$ (cm) và chiều dài là $(40 - 2x)$ (cm).

Theo đề bài, ta có phương trình:

$$(30-2x)(40-2x)=336$$

$$4x^2-140x+864=0$$

$$x^2-35x+216=0.$$

Ta có: $\Delta=(-35)^2-4\cdot 216=361, \sqrt{\Delta}=19.$

Phương trình có hai nghiệm:

$$x_1=\frac{35-19}{2}=8 \text{ (thoả mãn); } x_2=\frac{35+19}{2}=27>15 \text{ (loại).}$$

Vậy độ dài cạnh của bốn hình vuông cắt ra ở bốn góc là 8 cm.

6.31. Gọi vận tốc của xe máy đi từ tỉnh A đến tỉnh B là x (km/h). Điều kiện: $x>0$.

Đổi: 16 phút $=\frac{4}{15}$ giờ.

Vận tốc của ô tô đi từ tỉnh B về tỉnh A là: $x+15$ (km/h).

Quãng đường AB dài 54 km, sau 16 phút thì xe máy gặp ô tô ở một địa điểm cách B 24 km, nên quãng đường xe máy đã đi được là $54-24=30$ (km).

Do đó thời gian mà xe máy đi từ A đến nơi gặp nhau là: $\frac{30}{x}$ (giờ).

Theo đề bài, ta có phương trình:

$$\frac{30}{x}-\frac{4}{15}=\frac{24}{x+15}$$

$$\frac{30}{x}-\frac{24}{x+15}=\frac{4}{15}$$

$$4(x^2+15x)=15(6x+450)$$

$$4x^2-30x-6\,750=0.$$

Ta có: $\Delta'=15^2-4\cdot(-6\,750)=27\,225, \sqrt{\Delta'}=165.$

Phương trình có hai nghiệm:

$$x_1=\frac{15+165}{4}=45 \text{ (thoả mãn); } x_2=\frac{15-165}{5}<0 \text{ (loại).}$$

Vậy vận tốc của ô tô là 60 km/h.

6.32. Gọi khối lượng riêng của chất lỏng thứ hai x (g/cm^3). Điều kiện: $x > 0$.

Khi đó khối lượng riêng của chất lỏng thứ nhất là $x + 0,2$ (g/cm^3).

Thể tích của chất lỏng thứ nhất là $\frac{8}{x+0,2}$ (cm^3).

Thể tích của chất lỏng thứ hai là $\frac{6}{x}$ (cm^3).

Khối lượng hỗn hợp là 14 gam nên thể tích của hỗn hợp là: $\frac{14}{0,7} = 20$ (cm^3).

Theo đề bài, ta có phương trình:

$$\frac{8}{x+0,2} + \frac{6}{x} = 20$$

$$20x^2 + 4x = 14x + 1,2$$

$$2x^2 - x - 0,12 = 0.$$

Ta có: $\Delta = 1,96$; $\sqrt{\Delta} = 1,4$.

Phương trình có hai nghiệm là:

$x_1 = \frac{1+1,4}{4} = 0,6$ (thích hợp); $x_2 = \frac{1-1,4}{4} < 0$ (loại).

Vậy khối lượng riêng của hai chất lỏng ban đầu lần lượt là 0,8 g/cm^3 và 0,6 g/cm^3.

ÔN TẬP CHƯƠNG VI

A. CÂU HỎI (Trắc nghiệm)

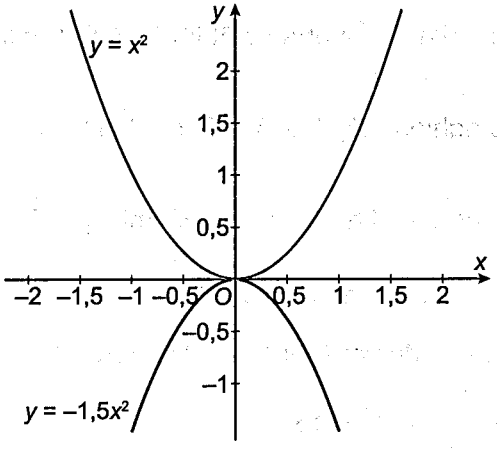
1. D. **2.** A. **3.** C. **4.** D. **5.** C. **6.** C. **7.** B. **8.** A. **9.** D. **10.** B.

B. TỰ LUẬN

6.33. a) Ta lập bảng giá trị của hai hàm số theo đề bài:

x	-2	-1	0	1	2
$y=x^2$	4	1	0	1	4
$y=-\frac{3}{2}x^2$	-6	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	-6

Từ đây vẽ được đồ thị của hai hàm số đã cho như sau:



b) Điểm A, B lần lượt thuộc hai đồ thị trên và đều có hoành độ $x = \frac{3}{2}$ nên ta có:

+ Tung độ của điểm A là $y = -\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{27}{8}$. Do đó $A\left(\frac{3}{2};-\frac{27}{8}\right)$.

+ Tung độ của điểm B là $y = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$. Do đó $B\left(\frac{3}{2};\frac{9}{4}\right)$.

c) Chú ý rằng hai điểm $(x_0;y_0)$ và $(-x_0;y_0)$ đối xứng với nhau qua trục tung Oy.

Vì A' đối xứng với A qua Oy, B' đối xứng với B qua Oy, nên suy ra $A'\left(-\frac{3}{2};-\frac{27}{8}\right)$ và $B'\left(-\frac{3}{2};\frac{9}{4}\right)$.

Kiểm tra bằng cách thay toạ độ điểm A' vào phương trình $y = -\frac{3}{2}x^2$, toạ độ điểm B' vào phương trình $y = x^2$, ta suy ra hai điểm A' và B' tương ứng cũng thuộc hai đồ thị đó.

6.34. a) Với $m = 1$, ta có phương trình bậc hai: $2x^2 - 3x + 1 = 0$.

Vì $a + b + c = 2 + (-3) + 1 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm là $x_1 = 1$ và $x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$.

b) Ta có $a = m + 1$. Phương trình là phương trình bậc hai khi $m + 1 \neq 0$, tức là khi $m \neq -1$.

c) Ta có: $\Delta = -4m + 5$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta > 0$, tức là khi $m < \frac{5}{4}$.

Phương trình có nghiệm kép khi $\Delta = 0$, tức là khi $m = \frac{5}{4}$.

Phương trình vô nghiệm khi $\Delta < 0$, tức là khi $m > \frac{5}{4}$.

6.35. a) *Cách 1*: Ta có $u - v = 2$ nên $u = v + 2$.

Thay vào $uv = 255$ ta được: $(v + 2)v = 255$ hay $v^2 + 2v - 255 = 0$.

Ta biến đổi thành: $(v + 1)^2 = 16^2$

Ta được hai nghiệm là $v_1 = 15$ hoặc $v_2 = -17$.

Vậy hai cặp giá trị $(u; v)$ là: (17; 15) và (–15; –17).

Cách 2: Ta có: $u + (-v) = 2$, $u \cdot (-v) = -255$.

Do đó u và $-v$ là hai nghiệm của phương trình bậc hai: $X^2 - 2X - 255 = 0$.

Từ đây suy ra kết quả như trên.

b) Từ phương trình thứ nhất ta có:

$$(u^2 + v^2) = 346 \text{ hay } (u + v)^2 - 2uv = 346.$$

Mà $uv = 165$ nên thay vào ta được

$$(u + v)^2 - 2 \cdot 165 = 346 \text{ hay } (u + v)^2 = 676 = 26^2.$$

Suy ra $u + v = 26$ hoặc $u + v = -26$.

Mà $u - v = 2$, nên ta tìm được hai cặp $(u; v)$ thoả mãn là: (14; 12) và (–12; –14).

6.36. Để tìm số sản phẩm cần bán để doanh thu đạt được là 220 000 USD ta giải phương trình:

$$R(x) = 220\,000$$

$$x(60 - 0{,}0004x) = 220\,000$$

$$0{,}0004x^2 - 60x + 220\,000 = 0$$

$$4x^2 - 600000x + 2\,200\,000\,000 = 0$$

$$x^2 - 150\,000x + 550\,000\,000 = 0.$$

Ta có $\Delta' = 5\,075\,000\,000$ nên $\sqrt{\Delta'} = 5\,000\sqrt{203}$.

Theo công thức nghiệm ta được $x \approx 3\,760{,}97$ hoặc $x \approx 146\,239{,}03$.

Vậy để doanh thu đạt 220 000 USD, phải bán được khoảng 3 761 sản phẩm (với giá mỗi sản phẩm khoảng $p = 60 - 0{,}0004 \cdot 3\,761 \approx 58{,}5$ USD) hoặc 146 240 sản phẩm (với giá mỗi sản phẩm khoảng

$$p = 60 - 0{,}0004 \cdot 146240 \approx 1{,}5 \text{ USD}).$$

Lưu ý: Trong thực tế, người ta còn phải chọn giá bán sao cho bù được chi phí sản xuất để không bị lỗ.

6.37. a) Vật ở độ cao 50 feet nên ta có phương trình:

$$50 = -16t^2 + 85t$$

$$16t^2 - 85t + 50 = 0.$$

Phương trình này có hai nghiệm dương là

$$t_1 = \frac{85 - 5\sqrt{161}}{32} \approx 0{,}67;\ t_2 = \frac{85 + 5\sqrt{161}}{32} \approx 4{,}64.$$

Vậy có hai thời điểm mà vật ở độ cao 50 feet là khi $t = 0{,}67$ giây (lúc vật bay lên) và khi $t = 4{,}64$ giây (khi vật rơi xuống).

b) Nếu vật đạt độ cao 120 feet thì ta có phương trình:

$$-16t^2 + 85t = 120$$

$$16t^2 - 85t + 120 = 0.$$

Do $\Delta = 85^2 - 4 \cdot 16 \cdot 120 < 0$ nên phương trình này vô nghiệm.

Vậy vật không bao giờ đạt đến độ cao 120 feet.

6.38. Theo đề bài, ta có phương trình:

$$125 = 0{,}006A^2 - 0{,}02A + 120$$

$$0{,}006A^2 - 0{,}02A - 5 = 0$$

$$3A^2 - 10A - 2500 = 0.$$

Ta có: $\Delta' = (-5)^2 - 3 \cdot (-2\,500) = 7\,525$, $\sqrt{\Delta'} = 5\sqrt{301}$.

Phương trình này có hai nghiệm:

$$A_1 = \frac{5 + 5\sqrt{301}}{3} \approx 30{,}6;\ A_2 = \frac{5 - 5\sqrt{301}}{3} < 0 \text{ (loại)}.$$

Vậy người đàn ông đó khoảng 31 tuổi.

6.39. a) Có 10 người chơi nên số ván cờ là $N = \dfrac{10^2 - 10}{2} = 45$ (ván cờ).

Vậy có tất cả 45 ván cờ trong giải đấu đó.

b) Có 36 ván cờ nên ta có phương trình:

$$\frac{x^2 - x}{2} = 36, \text{ hay } x^2 - x - 72 = 0.$$

Ta có: $\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-72) = 289$, $\sqrt{\Delta} = 17$.

Nghiệm dương của phương trình này là $x = \dfrac{1 + 17}{2} = 9$ (nghiệm còn lại âm).

Vậy có 9 người chơi đã tham gia giải đấu.

6.40. Đổi $4\dfrac{4}{5}$ giờ $= \dfrac{24}{5}$ giờ.

Cách 1: Lập phương trình (có ẩn ở mẫu).

Gọi x (giờ) là thời gian chảy một mình đầy bể của vòi thứ nhất. Điều kiện: $x > 0$.

Trong 1 giờ vòi thứ nhất chảy được $\dfrac{1}{x}$ (bể).

Trong 1 giờ cả hai vòi chảy được $1 : \dfrac{24}{5} = \dfrac{5}{24}$ (bể).

Suy ra, trong 1 giờ vòi thứ hai chảy được $\left(\dfrac{5}{24} - \dfrac{1}{x}\right)$ (bể).

Theo đề bài, nếu lúc đầu để riêng vòi thứ nhất và 9 giờ sau mở thêm vòi thứ hai thì sau $\dfrac{6}{5}$ giờ nữa mới đầy bể, nên ta có phương trình:

$$9 \cdot \frac{1}{x} + \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{24} = 1, \text{ hay } \frac{9}{x} = \frac{3}{4}, \text{ suy ra } x = 12.$$

Với $x = 12$ thì trong 1 giờ vòi thứ hai chảy được: $\dfrac{5}{24} - \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{8}$ (bể).

Vậy vòi thứ nhất chảy riêng thì sau 12 giờ đầy bể, vòi thứ hai chảy riêng thì sau 8 giờ đầy bể.

Chú ý. Nếu trong đề bài thay giả thiết "Nếu lúc đầu để vòi thứ nhất chảy riêng và 9 giờ sau mở thêm vòi thứ hai thì sau $\dfrac{6}{5}$ giờ nữa mới đầy bể" bằng giả thiết "Nếu để riêng mỗi vòi chảy đầy bể thì tổng thời gian hai vòi

phải chảy là 20 giờ" và gọi ẩn x như trên thì trong 1 giờ vòi thứ hai sẽ chảy được $\frac{1}{20-x}$ (bể). Do đó ta có phương trình:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{20-x}=\frac{5}{24}.$$

Giải phương trình có ẩn ở mẫu này ta tìm được x.

Cách 2: Lập hệ phương trình.

Gọi x, y (giờ) lần lượt là thời gian mỗi vòi chảy riêng đầy bể. Điều kiện: $x>0, y>0$.

Trong 1 giờ vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ (bể); vòi thứ hai chảy được $\frac{1}{y}$ (bể).

Cả hai vòi cùng chảy thì sau $\frac{24}{5}$ giờ đầy bể nên trong 1 giờ cả hai vòi chảy được $1:\frac{24}{5}=\frac{5}{24}$ (bể).

Do đó ta có phương trình thứ nhất: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{24}$.

Trong 9 giờ một mình vòi thứ nhất chảy được $\frac{9}{x}$ (bể).

Trong $\frac{6}{5}$ giờ cả hai vòi chảy được $\frac{6}{5}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ (bể).

Theo đề bài, nếu sau 9 giờ vòi thứ nhất chảy một mình, ta mở thêm vòi thứ hai thì sau $\frac{6}{5}$ giờ nữa đầy bể nên ta có phương trình thứ hai:

$$\frac{9}{x}+\frac{6}{5}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1.$$

Từ đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{24}\\ \frac{51}{x}+\frac{6}{y}=5.\end{cases}$

Đặt $\frac{1}{x}=u, \frac{1}{y}=v$, khi đó hệ phương trình trên trở thành: $\begin{cases}u+v=\frac{5}{24}\\ 51u+6v=5.\end{cases}$

Giải hệ này ta được $u = \frac{1}{12}, v = \frac{1}{8}$. Suy ra $x = 12; y = 8$.

Vậy vòi thứ nhất chảy riêng thì sau 12 giờ đầy bể, vòi thứ hai chảy riêng thì sau 8 giờ đầy bể.

CHƯƠNG VII. TẦN SỐ VÀ TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI

BÀI 22. BẢNG TẦN SỐ VÀ BIỂU ĐỒ TẦN SỐ

7.1. a) Bảng tần số:

Đội tuyển	Thái Lan	Malaysia	Myanmar	Việt Nam	Indonesia
Tần số	15	6	5	3	3

b) Thái Lan có số lần vô địch bóng đá nam SEA Games nhiều nhất, với 15 lần.

7.2. a) Bảng tần số:

Số bài tập	0	1	2	3	4	5	6
Tần số	1	5	6	10	7	4	3

b) Có 24 bạn trong lớp làm ít nhất ba bài tập.

7.3. a) Bảng tần số:

Môn thể thao	Bóng đá	Cầu lông	Bóng bàn	Môn khác
Tần số	14	8	4	7

b) Bóng đá được nhiều bạn yêu thích nhất.

7.4. a) Cuối năm thứ nhất, có 102 sinh viên đạt trình độ tiếng Anh mức A1, 115 sinh viên đạt trình độ tiếng Anh mức A2.

b) Bảng tần số:

Trình độ	A1	A2	B1	B2	C1
Tần số	102	115	345	35	3

c) Tổng số sinh viên là $n = 102 + 115 + 345 + 35 + 3 = 600$. Cuối năm thứ nhất, số sinh viên đạt trình độ tiếng Anh mức B1 trở lên là $345 + 35 + 3 = 383$. Ước lượng tỉ lệ sinh viên cuối năm thứ nhất đạt chuẩn trình độ tiếng Anh là $\frac{383}{600} \cdot 100\% \approx 64\%$.

7.5. a) Bảng tần số:

Chữ số	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Tần số	2	5	5	8	4	5	4	4	5	8

b) Hai chữ số xuất hiện nhiều nhất là 3 và 9; chữ số xuất hiện ít nhất là 0.

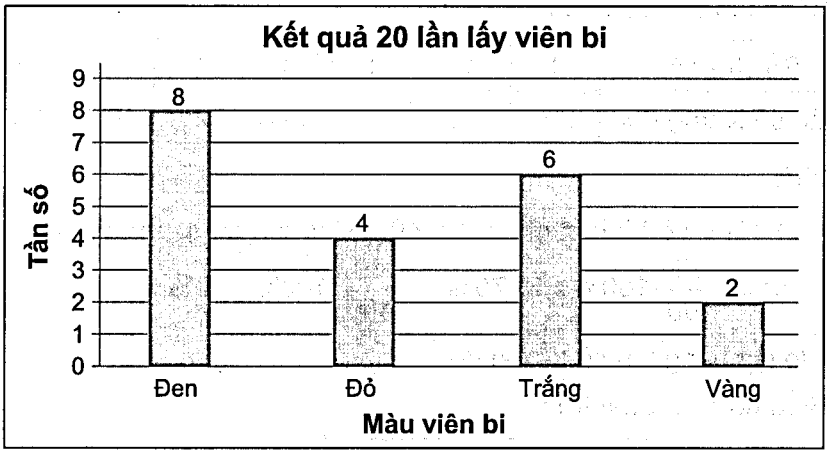
7.6. a) Bảng tần số:

Điểm	5	6	7	8	9	10
Tần số	2	6	10	13	7	1

b) Có nhiều học sinh được điểm 8 nhất, với 13 bạn.

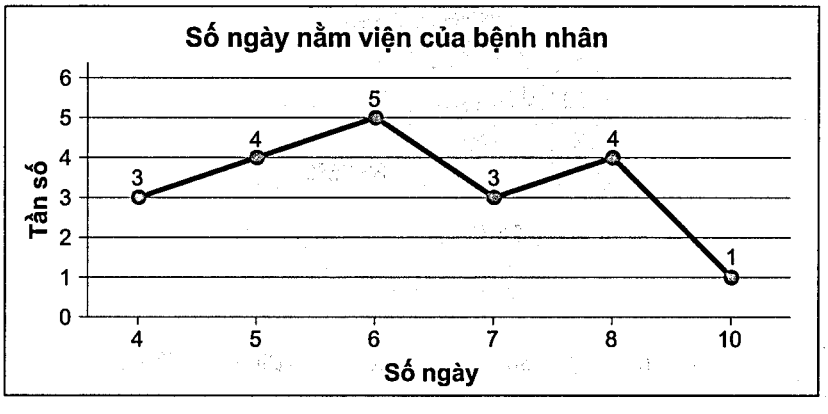
7.7. *HD.* a) Các giá trị là Đen, Đỏ, Trắng, Vàng với tần số tương ứng là 8, 4, 6, 2.

b) Biểu đồ tần số dạng cột:



7.8. *HD.* a) Đếm số lần xuất hiện của các giá trị 4, 5, 6, 7, 8, 10 và lập bảng tần số.

b) Biểu đồ tần số dạng đoạn thẳng:



BÀI 23. BẢNG TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI VÀ BIỂU ĐỒ TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI

7.9. a) Tổng số lần bắn là $n = 15 + 25 + 7 + 3 = 50$. Tần số tương đối của các điểm số 10, 9, 8, 7 lần lượt là $\frac{15}{50}\cdot 100\% = 30\%$; $\frac{25}{50}\cdot 100\% = 50\%$; $\frac{7}{50}\cdot 100\% = 14\%$; $\frac{3}{50}\cdot 100\% = 6\%$.

Ta có bảng tần số tương đối:

Điểm	10	9	8	7
Tần số tương đối	30%	50%	14%	6%

b) Ước lượng cho xác suất xạ thủ được điểm lớn hơn hoặc bằng 9 là:

30% + 50% = 80%.

7.10. a) Bảng tần số tương đối:

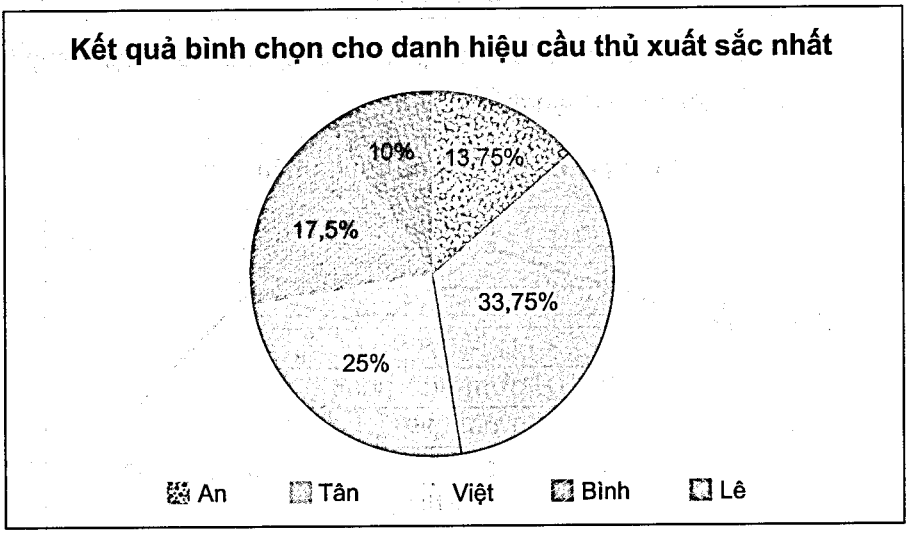
Số chữ cái	1	2	3	4	5	6	7	8
Tần số tương đối	2%	8%	15%	30%	22%	15%	7%	1%

b) 23%.

7.11. *HD.* a) Tổng số bình chọn là $n = 400$. Các tần số tương đối của An,..., Lê lần lượt là $\frac{55}{400}\cdot 100\% = 13{,}75\%$;...; $\frac{40}{400}\cdot 100\% = 10\%$.

Từ đó lập bảng tần số tương đối.

b) Biểu đồ hình quạt tròn:



7.12. a) Bảng tần số:

Mức đánh giá	★★	★★★	★★★★	★★★★★
Tần số	8	9	17	6

Tổng số đánh giá là $n = 8 + 9 + 17 + 6 = 40$. Các tần số tương đối lần lượt là:

$\frac{8}{40} \cdot 100\% = 20\%$; $\frac{9}{40} \cdot 100\% = 22{,}5\%$;

$\frac{17}{40} \cdot 100\% = 42{,}5\%$; $\frac{6}{40} \cdot 100\% = 15\%$.

Bảng tần số tương đối:

Mức đánh giá	★★	★★★	★★★★	★★★★★
Tần số tương đối	20%	22,5%	42,5%	15%

b) Ước lượng cho xác suất một khách hàng đánh giá ở mức từ ba sao trở xuống là 22,5% + 20% = 42,5%.

7.13. a) $x = 25$.

b) 80%.

c) 160 lần bắn trúng vòng 9 điểm hoặc 10 điểm.

7.14. a) Trong số những người đạt giải Nobel tính đến năm 2020, số người đạt giải Nobel về Vật lí, Hoá học, Kinh tế, Hoà bình, Y học, Văn học chiếm các tỉ lệ tương ứng là 23%, 20%, 9%, 11%, 24%, 13%.

b) Bảng tần số tương đối:

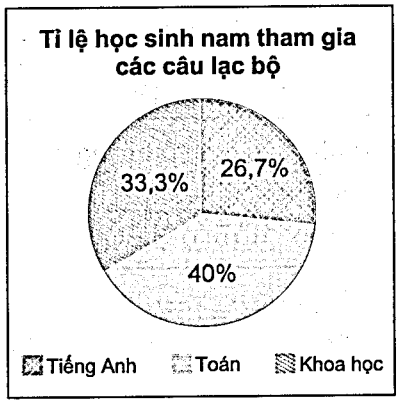
Lĩnh vực	Vật lí	Hoá học	Kinh tế	Hoà bình	Y học	Văn học
Tần số tương đối	23%	20%	9%	11%	24%	13%

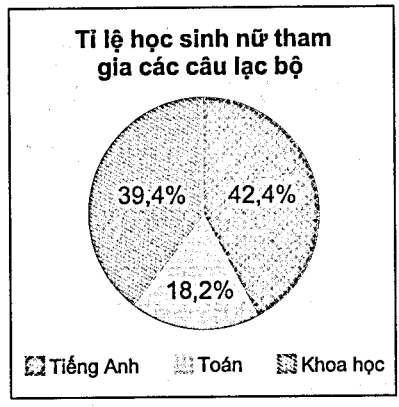
7.15. *HD.* a) Lập hai bảng tần số tương đối. Với học sinh nam, các tần số tương đối biểu diễn tỉ lệ tham gia CLB tiếng Anh, Toán, Khoa học lần lượt là $\frac{40}{150} \cdot 100\% \approx 26{,}7\%$; $\frac{60}{150} \cdot 100\% = 40\%$; $\frac{50}{150} \cdot 100\% \approx 33{,}3\%$.

Với học sinh nữ, các tần số tương đối biểu diễn tỉ lệ tham gia CLB tiếng Anh, Toán, Khoa học lần lượt là:

$\frac{70}{165} \cdot 100\% \approx 42{,}4\%$; $\frac{30}{165} \cdot 100\% \approx 18{,}2\%$; $\frac{65}{165} \cdot 100\% \approx 39{,}4\%$.

b) Các biểu đồ hình quạt tròn:

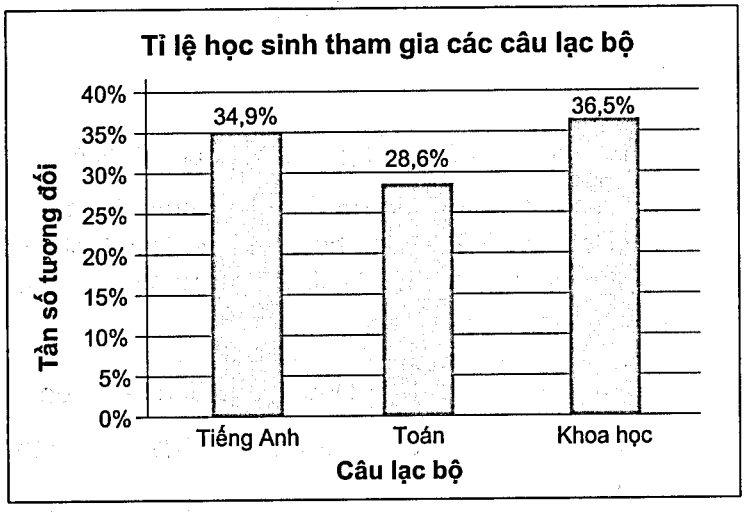




7.16. *HD.* a) Các tần số tương đối biểu diễn tỉ lệ học sinh tham gia CLB tiếng Anh, Toán, Khoa học lần lượt là:

$\frac{110}{315}\cdot 100\% \approx 34{,}9\%;\ \frac{90}{315}\cdot 100\% \approx 28{,}6\%;\ \frac{115}{315}\cdot 100\% \approx 36{,}5\%.$

b) Biểu đồ cột:



BÀI 24. BẢNG TẦN SỐ, TẦN SỐ TƯƠNG ĐỐI GHÉP NHÓM VÀ BIỂU ĐỒ

7.17. a) Khi mới sinh, có 8 con voi có cân nặng từ 110 kg đến dưới 115 kg; 15 con có cân nặng từ 115 kg đến dưới 120 kg; 17 con có cân nặng từ 120 kg đến dưới 125 kg; 10 con có cân nặng từ 125 kg đến dưới 130 kg.

b) Tổng số con voi là $n = 8 + 15 + 17 + 10 = 50$. Các tần số tương đối tương ứng là:

$\frac{8}{50}\cdot 100\% = 16\%;\ \frac{15}{50}\cdot 100\% = 30\%;\ \frac{17}{50}\cdot 100\% = 34\%;\ \frac{10}{50}\cdot 100\% = 20\%.$

Ta có bảng tần số tương đối ghép nhóm sau:

Cân nặng (kg)	[110; 115)	[115; 120)	[120; 125)	[125; 130)
Tần số tương đối	16%	30%	34%	20%

7.18. a) Nhóm [72; 73) có tần số tương đối là 10% tức là có 10% số lần đo cho kết quả có giá trị từ 72 W đến dưới 73 W. Nhóm [73; 74) có tần số tương đối là 20% tức là có 20% số lần đo cho kết quả có giá trị từ 73 W đến dưới 74 W.

b) Các tần số tương ứng là $20 \cdot 10\% = 2$; $20 \cdot 20\% = 4$; $20 \cdot 30\% = 6$; $20 \cdot 25\% = 5$; $20 \cdot 15\% = 3$. Ta có bảng tần số ghép nhóm sau:

Công suất (W)	[72; 73)	[73; 74)	[74; 75)	[75; 76)	[76; 77)
Tần số	2	4	6	5	3

7.19. Bảng tần số ghép nhóm:

Mức huyết áp (mmHg)	[90; 120) (Bình thường)	[120; 140) (Tiền tăng huyết áp)	Từ 140 trở lên (Tăng huyết áp)
Tần số	11	11	9

Bảng tần số tương đối ghép nhóm:

Mức huyết áp (mmHg)	[90; 120) (Bình thường)	[120; 140) (Tiền tăng huyết áp)	Từ 140 trở lên (Tăng huyết áp)
Tần số tương đối	35,5%	35,5%	29%

7.20. a) Nhóm [0; 5) có tỉ lệ là 45% nghĩa là có 45% người dùng phần mềm ứng dụng có dung lượng bộ nhớ dùng để lưu trữ ảnh dưới 5 GB.

b) Bảng tần số tương đối ghép nhóm:

Dung lượng (GB)	[0; 5)	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)
Tần số tương đối	45%	30%	15%	10%

7.21. a) *HD.* Đọc và giải thích tương tự như câu a bài tập 7.20.

b) Bảng tần số tương đối ghép nhóm:

Mức lương (triệu đồng)	[7; 10)	[10; 13)	[13; 16)	[16; 19)	[19; 22)	[22; 25)
Tần số tương đối	6%	10%	24%	30%	16%	14%

c) Bảng tần số ghép nhóm:

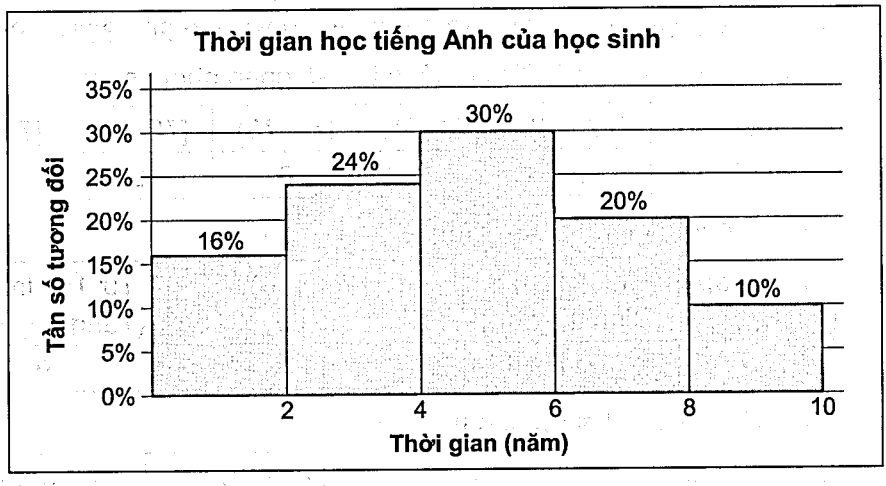
Mức lương (triệu đồng)	[7; 10)	[10; 13)	[13; 16)	[16; 19)	[19; 22)	[22; 25)
Tần số	18	30	72	90	48	42

7.22. *HD.* a) Tổng số học sinh là $n = 50$. Các tần số tương đối tương ứng là

$\frac{8}{50}\cdot 100\% = 16\%;\ \frac{12}{50}\cdot 100\% = 24\%;\ \frac{15}{50}\cdot 100\% = 30\%;$

$\frac{10}{50}\cdot 100\% = 20\%;\ \frac{5}{50}\cdot 100\% = 10\%.$

b) Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột:

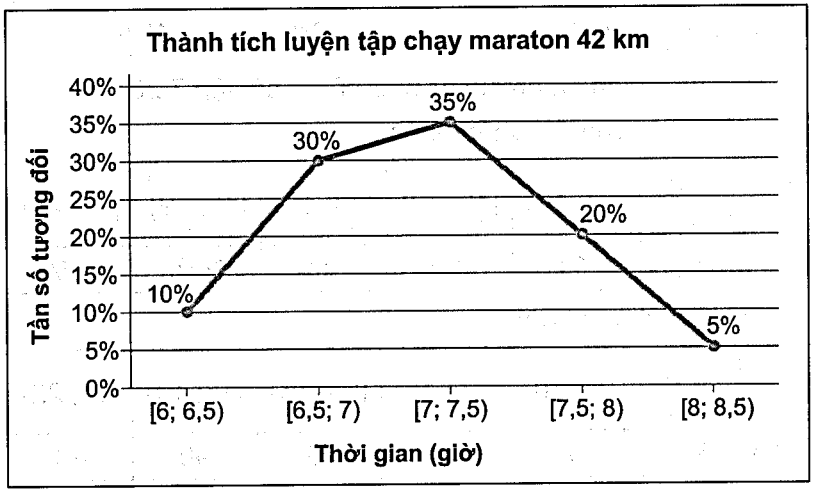


7.23. *HD.* a) Số vận động viên là $n = 20$. Các tần số tương đối tương ứng là

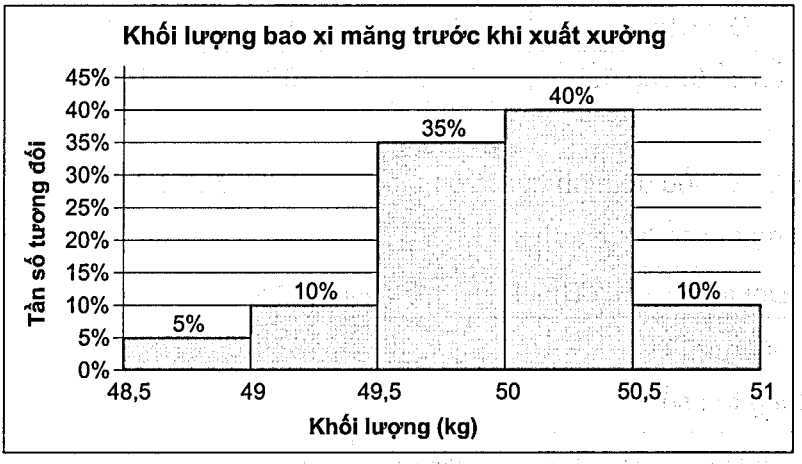
$\frac{2}{20}\cdot 100\% = 10\%;\ \frac{6}{20}\cdot 100\% = 30\%;$

$\frac{7}{20}\cdot 100\% = 35\%;\ \frac{4}{20}\cdot 100\% = 20\%;\ \frac{1}{20}\cdot 100\% = 5\%.$

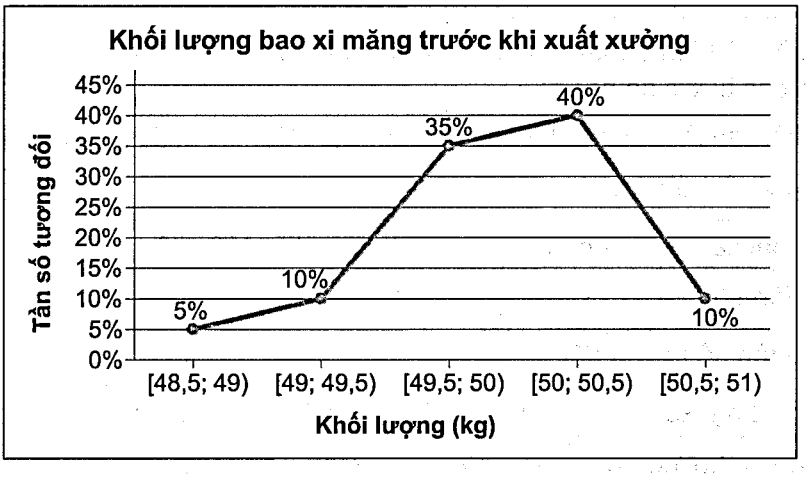
b) Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng:



7.24. Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột:



Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng đoạn thẳng:



ÔN TẬP CHƯƠNG VII

A. CÂU HỎI (Trắc nghiệm)

1. C. **2.** B. **3.** A. **4.** B. **5.** D. **6.** C.

B. BÀI TẬP

7.25. a) Bảng tần số:

Đội bóng	9A	9C	8B	7D
Tần số	150	200	50	100

Bảng tần số tương đối:

Đội bóng	9A	9C	8B	7D
Tần số tương đối	30%	40%	10%	20%

b) 30%.

c) *HD*. Vẽ biểu đồ hình quạt tròn theo các bước đã học.

7.26. a) Bảng tần số tương đối:

Đội tuyển	Thái Lan	Malaysia	Myanmar	Việt Nam	Indonesia
Tần số tương đối	47%	19%	16%	9%	9%

b) Bảng tần số:

Đội tuyển	Thái Lan	Malaysia	Myanmar	Việt Nam	Indonesia
Tần số	15	6	5	3	3

c) *HD*. Vẽ biểu đồ tần số dạng cột biểu diễn bảng tần số thu được ở câu b theo các bước đã học.

d) Thái Lan là đội vô địch bóng đá nam SEA Games nhiều lần nhất, với 15 lần.

7.27. a) Bảng tần số:

Loại xe	4 chỗ	7 chỗ	16 chỗ	Trên 16 chỗ
Tần số	35	20	15	10

Bảng tần số tương đối:

Loại xe	4 chỗ	7 chỗ	16 chỗ	Trên 16 chỗ
Tần số tương đối	43,75%	25%	18,75%	12,5%

b) *HD*. Vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn bảng tần số tương đối thu được ở câu a theo các bước đã học.

c) 50 xe.

7.28. a) Nhóm [53,5; 54) có tỉ lệ là 15% nghĩa là có 15% số vận động viên nữ có thành tích ném lao từ 53,5 m đến dưới 54 m. Nhóm [54; 54,5) có tỉ lệ 25% nghĩa là có 25% số vận động viên nữ có thành tích ném lao từ 54 m đến dưới 54,5 m.

b) Bảng tần số tương đối ghép nhóm:

Thành tích (m)	[53,5; 54)	[54; 54,5)	[54,5; 55)	[55; 55,5)	[55,5; 56)
Tần số tương đối	15%	25%	30%	20%	10%

c) Các tần số tương ứng với các nhóm là: $40 \cdot 15\% = 6$; $40 \cdot 25\% = 10$; $40 \cdot 30\% = 12$; $40 \cdot 20\% = 8$; $40 \cdot 10\% = 4$. Bảng tần số ghép nhóm:

Thành tích (m)	[53,5; 54)	[54; 54,5)	[54,5; 55)	[55; 55,5)	[55,5; 56)
Tần số	6	10	12	8	4

7.29. a) Bảng tần số tương đối ghép nhóm:

Thành tích (m)	[70,5; 71)	[71; 71,5)	[71,5; 72)	[72; 72,5)	[72,5; 73)	[73; 73,5)
Tần số tương đối	5%	12,5%	17,5%	37,5%	20%	7,5%

b) *HD.* Vẽ biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột biểu diễn bảng tần số tương đối ghép nhóm thu được ở câu a theo các bước đã học.

c) Thành tích ném lao của vận động viên nam cao hơn của vận động viên nữ.

7.30. a) Bảng tần số:

Cỡ giày	32	33	34	35	36
Tần số	3	5	13	6	3

Cỡ giày 34 phù hợp với nhiều bạn nhất.

b) Bảng tần số tương đối:

Cỡ giày	32	33	34	35	36
Tần số tương đối	10%	16,7%	43,3%	20%	10%

Ước lượng xác suất để một học sinh đi giày cỡ 34 là 43,3%.

c) Bảng tần số ghép nhóm theo chiều dài bàn chân:

Chiều dài bàn chân (cm)	[19; 19,4)	[19,4; 19,7)	[19,7; 20,6)	[20,6; 21,6)	[21,6; 22,2)
Tần số	3	5	13	6	3

Bảng tần số tương đối ghép nhóm theo chiều dài bàn chân:

Chiều dài bàn chân (cm)	[19; 19,4)	[19,4; 19,7)	[19,7; 20,6)	[20,6; 21,6)	[21,6; 22,2)
Tần số tương đối	10%	16,7%	43,3%	20%	10%

CHƯƠNG VIII. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ TRONG MỘT SỐ MÔ HÌNH XÁC SUẤT ĐƠN GIẢN

BÀI 25. PHÉP THỬ NGẪU NHIÊN VÀ KHÔNG GIAN MẪU

8.1. a) Phép thử là lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hai túi.

b) Ta lập bảng sau:

Túi I \ Túi II	X_1	X_2	X_3	D_1	D_2
B_1	(B_1, X_1)	(B_1, X_2)	(B_1, X_3)	(B_1, D_1)	(B_1, D_2)
B_2	(B_2, X_1)	(B_2, X_2)	(B_2, X_3)	(B_2, D_1)	(B_2, D_2)
T_1	(T_1, X_1)	(T_1, X_2)	(T_1, X_3)	(T_1, D_1)	(T_1, D_2)
T_2	(T_2, X_1)	(T_2, X_2)	(T_2, X_3)	(T_2, D_1)	(T_2, D_2)

Mỗi ô là một kết quả có thể. Không gian mẫu là tập hợp 20 ô của bảng trên.

Vậy $\Omega = \{(B_1, X_1); (B_2, X_1); (T_1, X_1); (T_2, X_1); ...; (B_1, D_2); (B_2, D_2); (T_1, D_2); (T_2, D_2)\}$.

8.2. a) Phép thử là gieo một đồng xu đồng thời lấy ngẫu nhiên một quả bóng từ một hộp chứa 4 quả bóng với các màu xanh, đỏ, tím, vàng.

b) Kí hiệu S, N tương ứng là đồng xu xuất hiện mặt sấp, mặt ngửa và kí hiệu 4 quả bóng màu xanh, đỏ, tím, vàng tương ứng là X, D, T, V. Ta lập bảng sau:

Minh \ Ngọc	X	D	T	V
S	(S, X)	(S, D)	(S, T)	(S, V)
N	(N, X)	(N, D)	(N, T)	(N, V)

Mỗi ô là một kết quả có thể. Có 8 kết quả có thể. Không gian mẫu là tập hợp 8 ô của bảng trên.

Vậy $\Omega = \{(S, X); (S, D); (S, T); (S, V); (N, X); (N, D); (N, T); (N, V)\}$.

8.3. a) Phép thử là từ túi A rút ngẫu nhiên một tấm thẻ đồng thời từ túi B lấy ngẫu nhiên một viên bi.

b) Kí hiệu 4 viên bi màu xanh, đỏ, tím, vàng tương ứng là X, D, T, V. Ta lập bảng sau:

Túi B \ Túi A	1	2	3	4
X	(1, X)	(2, X)	(3, X)	(4, X)
D	(1, D)	(2, D)	(3, D)	(4, D)
T	(1, T)	(2, T)	(3, T)	(4, T)
V	(1, V)	(2, V)	(3, V)	(4, V)

Mỗi ô là một kết quả có thể. Có 16 kết quả có thể. Không gian mẫu là tập hợp 16 ô của bảng trên. Vậy Ω = {(1, X); (1, D);...; (4, T); (4, V)}.

8.4. a) Phép thử là lấy ngẫu nhiên từ một hộp đựng 6 chiếc kẹo với các nhãn hiệu A, B, C, D, E, F lần lượt hai chiếc kẹo, chiếc kẹo được lấy ra lần đầu không trả lại vào hộp.

Kết quả của phép thử là một cặp (x, y), trong đó x và y tương ứng là nhãn hiệu của chiếc kẹo mà hai bạn Lan và Hồng lấy trong hộp. Vì chiếc kẹo bạn Lan lấy ra không trả lại vào hộp nên $x \neq y$.

b) Ta liệt kê được tất cả các kết quả có thể của phép thử bằng cách lập bảng sau:

Lan \ Hồng	A	B	C	D	E	F
A	(A, A)	(A, B)	(A, C)	(A, D)	(A, E)	(A, F)
B	(B, A)	(B, B)	(B, C)	(B, D)	(B, E)	(B, F)
C	(C, A)	(C, B)	(C, C)	(C, D)	(C, E)	(C, F)
D	(D, A)	(D, B)	(D, C)	(D, D)	(D, E)	(D, F)
E	(E, A)	(E, B)	(E, C)	(E, D)	(E, E)	(E, F)
F	(F, A)	(F, B)	(F, C)	(F, D)	(F, E)	(F, F)

Chú ý rằng $x \neq y$ nên cặp có hai phần tử trùng nhau không được tính, tức là trong bảng ta phải xoá 6 ô (A, A); (B, B); (C, C); (D, D); (E, E); (F, F).

Vậy Ω = {(B, A); (C, A);...; (D, F); (E, F)}.

Không gian mẫu có 36 – 6 = 30 (phần tử).

8.5. a) Phép thử là quay tấm bìa hai lần và quan sát xem mũi tên chỉ vào hình quạt nào khi tấm bìa dừng lại. Kết quả phép thử là cặp (x, y) trong đó x, y là một trong các số 1, 2, 3, 4, 5.

b) Ta liệt kê được tất cả các kết quả có thể của phép thử bằng cách lập bảng sau:

Lần 1 \ Lần 2	1	2	3	4	5
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)

Mỗi ô trong bảng là một kết quả có thể. Có 25 kết quả có thể. Không gian mẫu là tập hợp 25 ô của bảng trên. Vậy Ω = {(1, 1); (2, 1); (3, 1)...; (4, 5); (5, 5)}.

BÀI 26. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ LIÊN QUAN TỚI PHÉP THỬ

8.6. Không gian mẫu Ω = {1S; 1N; 2S; 2N; 3S; 3N; 4S; 4N; 5S; 5N; 6S; 6N}; $n(\Omega) = 12$.

a) Có 6 kết quả thuận lợi cho biến cố E là 1S, 1N, 3S, 3N, 5S, 5N.

Vậy $P(E) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

b) Có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố F là 2N, 4N, 6N. Vậy $P(F) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

8.7. Không gian mẫu $\Omega = \{(a, b);\ 1 \le a, b \le 6\}$, trong đó a, b tương ứng là số chấm xuất hiện trên con xúc xắc ở lần gieo thứ nhất và thứ hai; $n(\Omega) = 36$.

Gọi A là biến cố "Tổng số chấm xuất hiện trên con xúc xắc trong hai lần gieo lớn hơn hoặc bằng 8".

Có 15 kết quả thuận lợi cho biến cố A là (2, 6); (3, 5); (3, 6); (4, 4); (4, 5); (4, 6); (5, 3); (5, 4); (5, 5); (5, 6); (6, 2); (6, 3); (6, 4); (6, 5); (6, 6).

Vậy $P(A) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

8.8. Không gian mẫu Ω = {(1, A); (2, A); (3, A); (4, A); (5, A); (6, A); (1, B); (2, B); (3, B); (4, B), (5, B); (6, B); (1, C); (2, C); (3, C); (4, C); (5, C); (6, C); (1, D); (2, D); (3, D), (4, D); (5, D); (6, D)}; $n(\Omega) = 24$.

a) Có 4 kết quả thuận lợi cho biến cố C là (6, A); (6, B); (6, C); (6, D).

Vậy $P(C) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

b) Có 9 kết quả thuận lợi cho biến cố D là (5, A); (5, B); (5, C); (5, D); (1, A); (2, A); (3, A); (4, A); (6, A). Vậy $P(D) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

8.9. Mô tả không gian mẫu:

Bình \ Thịnh	1	2	3	4	5	6
S	(S, 1)	(S, 2)	(S, 3)	(S, 4)	(S, 5)	(S, 6)
N	(N, 1)	(N, 2)	(N, 3)	(N, 4)	(N, 5)	(N, 6)

Có 12 kết quả có thể là đồng khả năng. $n(\Omega) = 12$.

a) Có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố E là (S, 4); (S, 5); (S, 6).

Vậy $P(E) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

b) Có 9 kết quả thuận lợi cho biến cố F là (N, 1); (N, 2); (N, 3); (N, 4); (N, 5); (N, 6); (S, 4); (S, 5); (S, 6). Vậy $P(F) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

8.10. Mô tả không gian mẫu:

Tuấn \ Mai	1	2	3	4
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)

Có 20 kết quả có thể là đồng khả năng. $n(\Omega) = 20$.

a) Bỏ đi 4 ô (1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4), ta có 20 – 4 = 16 kết quả thuận lợi cho biến cố A.

Vậy $P(A) = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$.

b) Có 7 kết quả thuận lợi cho biến cố B là (1, 2); (2, 1); (2, 3); (3, 2); (3, 4); (4, 3); (5, 4). Vậy $P(B) = \frac{7}{20}$.

c) Có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố C là (1, 4); (4, 1); (5, 2). Vậy $P(C) = \frac{3}{20}$.

8.11. Mô tả không gian mẫu:

Nam \ Bình	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)

Có 24 kết quả có thể là đồng khả năng. $n(\Omega) = 24$.

a) Có 12 kết quả thuận lợi cho biến cố E là (1, 2); (1, 3); (1, 5); (2, 1); (2, 4); (2, 6); (3, 1); (3, 4); (3, 6); (4, 2); (4, 3); (4, 5). Vậy $P(E) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$.

b) Có 10 kết quả thuận lợi cho biến cố F là (1, 6); (2, 5); (2, 6); (3, 4); (3, 5); (3, 6); (4, 3); (4, 4); (4, 5); (4, 6). Vậy $P(F) = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$.

8.12. Kết quả có thể khi bạn Lan rút ngẫu nhiên một tấm thẻ từ mỗi hộp A và B:

A \ B	1	2	3
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)

Kết quả có thể của phép thử:

Linh \ Lan	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)
1	(1, 1, 1)	(1, 2, 1)	(1, 3, 1)	(2, 1, 1)	(2, 2, 1)	(2, 3, 1)
2	(1, 1, 2)	(1, 2, 2)	(1, 3, 2)	(2, 1, 2)	(2, 2, 2)	(2, 3, 2)
3	(1, 1, 3)	(1, 2, 3)	(1, 3, 3)	(2, 1, 3)	(2, 2, 3)	(2, 3, 3)
4	(1, 1, 4)	(1, 2, 4)	(1, 3, 4)	(2, 1, 4)	(2, 2, 4)	(2, 3, 4)

Có 24 kết quả có thể là đồng khả năng. $n(\Omega) = 24$.

a) Có 8 kết quả thuận lợi cho biến cố E là (2, 3, 1); (1, 3, 2); (1, 2, 3); (2, 1, 3); (1, 2, 4); (1, 3, 4); (2, 1, 4); (2, 3, 4). Vậy $P(E) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$.

b) Có 5 kết quả thuận lợi cho biến cố F là (1, 3, 1); (2, 2, 1); (1, 2, 2); (2, 1, 2); (1, 1, 3). Vậy $P(F) = \frac{5}{24}$.

ÔN TẬP CHƯƠNG VIII

A. CÂU HỎI (Trắc nghiệm)

1. A. **2.** C. **3.** A.

B. BÀI TẬP

8.13. Mô tả không gian mẫu:

Đồng xu / Xúc xắc	S	N
1	(1, S)	(1, N)
2	(2, S)	(2, N)
3	(3, S)	(3, N)
4	(4, S)	(4, N)
5	(5, S)	(5, N)
6	(6, S)	(6, N)

Có 12 kết quả có thể là đồng khả năng. $n(\Omega) = 12$.

- Có 1 kết quả thuận lợi cho biến cố E là (6, S). Vậy $P(E) = \frac{1}{12}$.
- Có 6 kết quả thuận lợi cho biến cố F là (1, S); (1, N); (3, S); (3, N); (5, S); (5, N). Vậy $P(F) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.
- Có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố G là (2, S); (4, S); (6, S). Vậy $P(G) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.
- Có 7 kết quả thuận lợi cho biến cố H là (5, S); (5, N); (1, N); (2, N); (3, N); (4, N); (6, N). Vậy $P(H) = \frac{7}{12}$.

8.14. a) Kí hiệu các màu trắng, đỏ, xanh, vàng lần lượt là T, Đ, X, V. Không gian mẫu Ω = {TĐ; TX; TV; ĐĐ; ĐX; ĐV; XĐ; XX; XV; VĐ; VX; VV}.

Có 12 kết quả có thể là đồng khả năng.

a) Có 1 kết quả thuận lợi cho biến cố E là ĐĐ. Vậy $P(E) = \frac{1}{12}$.

b) Có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố F là ĐĐ, XX, VV. Vậy $P(F) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

c) Có 5 kết quả thuận lợi cho biến cố G là TĐ, ĐX, ĐV, XĐ, VĐ.

Vậy $P(G) = \frac{5}{12}$.

8.15. a) Mô tả không gian mẫu:

	Thư gửi cho	An	Bình	Cường
1	Địa chỉ trên phong bì	An	Bình	Cường
2		An	Cường	Bình
3		Bình	An	Cường
4		Cường	An	Bình
5		Cường	Bình	An
6		Bình	Cường	An

Không gian mẫu có 6 kết quả có thể là 6 dòng ở bảng trên.

b) Có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố E là kết quả 2 (chỉ có An đúng), kết quả 3 (chỉ có Cường đúng) và kết quả 5 (chỉ có Bình đúng).

Vậy $P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Có 1 kết quả thuận lợi cho biến cố F là kết quả 1. Vậy $P(F) = \frac{1}{6}$.

Có 2 kết quả thuận lợi cho biến cố G là kết quả 4, kết quả 6.

Vậy $P(G) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Có 4 kết quả thuận lợi cho biến cố H là kết quả 1, kết quả 2, kết quả 3, kết quả 5. Vậy $P(H) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

8.16. Mỗi kết quả có thể là một cặp số (a, b), trong đó a, b tương ứng là số ghi trên hình quạt mà mũi tên chỉ vào khi tấm bìa dừng lại ở lần quay thứ nhất và thứ hai.

Không gian mẫu là $\Omega = \{(1, 1); (1, 2);...; (6, 6)\}$. Có 36 kết quả có thể là đồng khả năng.

Có 6 vị trí mà hai hình quạt tròn đối xứng nhau qua tâm là (1, 4); (4, 1); (3, 6); (6, 3); (2, 5); (5, 2). Do đó có $36 - 6 = 30$ vị trí mà hai hình quạt tròn không đối xứng nhau qua tâm.

Vậy $P = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$.

8.17. Có 4 kiểu gene ứng với màu hạt của cây con là AA; Aa; aA; aa.

Có 4 kiểu gene ứng với hình dạng hạt của cây con là BB; Bb; bB; bb.

Ta liệt kê được tất cả các kết quả có thể của phép thử bằng cách lập bảng sau:

Dạng hạt / Màu hạt	BB	Bb	bB	bb
AA	(AA, BB)	(AA, Bb)	(AA, bB)	(AA, bb)
Aa	(Aa, BB)	(Aa, Bb)	(Aa, bB)	(Aa, bb)
aA	(aA, BB)	(aA, Bb)	(aA, bB)	(aA, bb)
aa	(aa, BB)	(aa, Bb)	(aa, bB)	(aa, bb)

Mỗi ô là một kết quả có thể. Không gian mẫu là tập hợp 16 ô của bảng trên. Như vậy, không gian mẫu của phép thử là Ω = {(AA, BB); (AA, Bb); (AA, bB); (AA, bb); (Aa, BB); (Aa, Bb); (Aa, bB); (Aa, bb); (aA, BB); (aA, Bb); (aA, bB); (aA, bb); (aa, BB); (aa, Bb); (aa, bB); (aa, bb)}.

Có 16 kết quả có thể là đồng khả năng.

Gọi E là biến cố "Cây con có hạt vàng và trơn".

Cây con có hạt vàng và trơn nếu trong gene màu hạt có ít nhất một allele trội A và trong gene dạng hạt có ít nhất một allele trội B.

Có 9 kết quả thuận lợi cho biến cố E là (AA, BB); (AA, Bb); (AA, bB); (Aa, BB); (Aa, Bb); (Aa, bB); (aA, BB); (aA, Bb); (aA, bB).

Vậy $P(E) = \frac{9}{16}$.

CHƯƠNG IX. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

BÀI 27. GÓC NỘI TIẾP

9.1. Hình a, b, d đều vẽ góc có đỉnh không nằm trên đường tròn nên đó không phải là góc nội tiếp đường tròn. Hình c vẽ góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn nên là góc nội tiếp đường tròn.

9.2. Số đo còn lại của góc hoặc cung tương ứng trong mỗi trường hợp được cho như sau:

	Trường hợp 1	Trường hợp 2	Trường hợp 3
Số đo của $\widehat{BAC}$	30°	40°	60°
Số đo của $\overset{\frown}{BC}$	60°	80°	120°
Số đo của $\widehat{BOC}$	60°	80°	120°

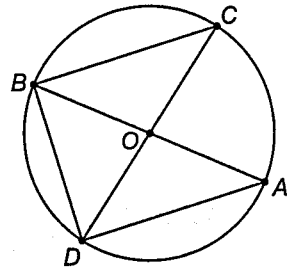
9.3. (H.9.16) Xét trong đường tròn (O), ta có:

Hai góc nội tiếp ABC, ADC và góc ở tâm AOC cùng chắn cung nhỏ $\overset{\frown}{AC}$ nên

$$\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = \frac{1}{2}\widehat{AOC} = 40^\circ;$$

Góc nội tiếp ABD và góc ở tâm AOD cùng chắn cung nhỏ $\overset{\frown}{AD}$ nên

$$\widehat{ABD} = \frac{1}{2}\widehat{AOD} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{AOC}) = 50^\circ.$$



Hình 9.16

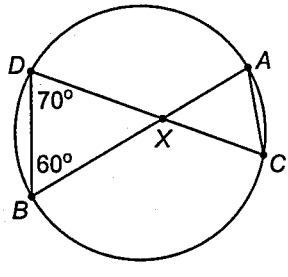
9.4. (H.9.17) Xét trong đường tròn (O), ta có:

Hai góc nội tiếp ACX và XBD cùng chắn cung nhỏ $\overset{\frown}{AD}$ nên $\widehat{ACX} = \widehat{XBD} = 60^\circ$.

Hai góc nội tiếp CAX và XDB cùng chắn cung nhỏ $\overset{\frown}{CB}$ nên $\widehat{CAX} = \widehat{XDB} = 70^\circ$.

Tổng các góc trong tam giác AXC bằng 180° nên

$$\widehat{AXC} = 180^\circ - \widehat{ACX} - \widehat{CAX} = 50^\circ.$$



Hình 9.17

9.5. (H.9.18) Vì tam giác OAB cân tại O nên

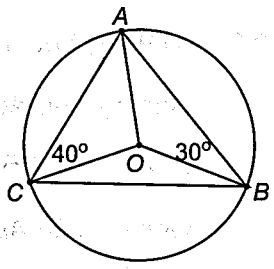
$\widehat{AOB} = 180^o - \widehat{OAB} - \widehat{OBA} = 180^o - 2\widehat{OBA} = 120^o.$

Vì tam giác OAC cân tại O nên

$\widehat{AOC} = 180^o - \widehat{OAC} - \widehat{OCA} = 180^o - 2\widehat{OCA} = 100^o.$

Xét trong đường tròn (O), ta có:

Góc nội tiếp ABC và góc ở tâm AOC cùng chắn cung nhỏ $\overset{\frown}{AC}$ nên $\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{AOC} = 50^o$;



Hình 9.18

Góc nội tiếp ACB và góc ở tâm AOB cùng chắn cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ nên

$$\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = 60^o.$$

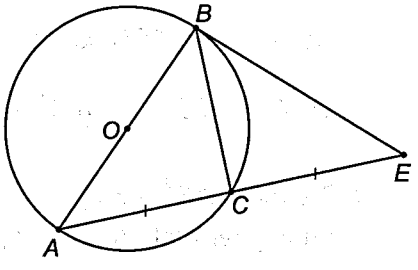
Vì tổng các góc trong tam giác ABC bằng 180^o nên

$$\widehat{BAC} = 180^o - \widehat{ABC} - \widehat{ACB} = 70^o.$$

9.6. (H.9.19) Vì ACB là góc nội tiếp của đường tròn (O) chắn nửa đường tròn nên $\widehat{ACB} = 90^o$. Suy ra $BC \perp AE$. Mặt khác, vì E đối xứng với A qua C nên $CA = CE$.

Hai tam giác BCA và BCE có: BC là cạnh chung; $\widehat{BCA} = \widehat{BCE} = 90^o$ (vì $BC \perp AE$); $CA = CE$ (theo chứng minh trên).

Vậy $\Delta BCA = \Delta BCE$ (c.g.c). Suy ra $BA = BE$.

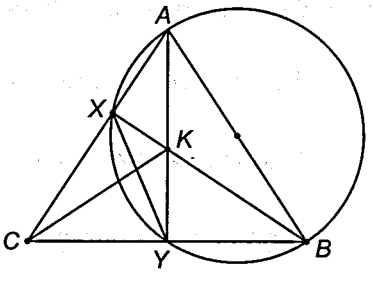


Hình 9.19

9.7. (H.9.20) a) Do $\widehat{AXB}$ và $\widehat{AYB}$ là các góc nội tiếp đường tròn đường kính AB và chắn nửa đường tròn nên $\widehat{AXB} = \widehat{AYB} = 90^o$.

Suy ra $AY \perp BC$; $BX \perp AC$.

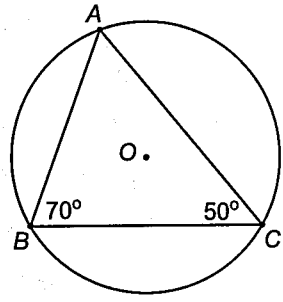
Vì tam giác ABC cân tại A nên đường cao AY cũng là đường trung tuyến của tam giác. Do đó Y là trung điểm của BC. Suy ra Y là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông BXC (vuông tại X). Vì vậy $YC = YX$, hay tam giác CXY cân tại Y.



Hình 9.20

b) Vì AY, BX là các đường cao của tam giác ABC nên K là trực tâm của tam giác ABC. Do đó CK vuông góc AB.

9.8. (H.9.21) Xét đường tròn (O), ta có:



Hình 9.21

Góc nội tiếp ACB chắn cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ nên

sđ $\overset{\frown}{AB} = 2\overset{\frown}{ACB} = 100^\circ$;

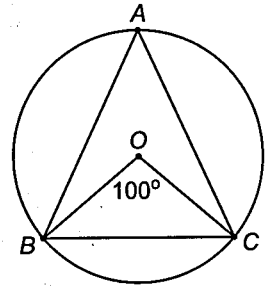
Góc nội tiếp ABC chắn cung nhỏ $\overset{\frown}{AC}$ nên

sđ $\overset{\frown}{AC} = 2\overset{\frown}{ABC} = 140^\circ$;

Góc nội tiếp BAC chắn cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$ nên:

sđ $\overset{\frown}{BC} = 2\overset{\frown}{BAC} = 2(180^\circ - \overset{\frown}{ABC} - \overset{\frown}{ACB}) = 120^\circ$.

9.9. (H.9.22) Do $\overset{\frown}{BAC}$ là góc nội tiếp và $\overset{\frown}{BOC}$ là góc ở tâm của đường tròn (O) cùng chắn cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$ nên $\overset{\frown}{BAC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BOC} = 50^\circ$.



Hình 9.22

Do tam giác ABC cân tại đỉnh A nên

$\overset{\frown}{ABC} = \overset{\frown}{ACB} = \frac{1}{2}(180^\circ - \overset{\frown}{BAC}) = 65^\circ$.

9.10. Ta thấy $AB^2 + AC^2 = BC^2$; theo định lí Pythagore đảo thì tam giác ABC vuông tại đỉnh A. Do đó, đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâm là trung điểm của BC và bán kính là $R = \frac{BC}{2} = 5$ cm. Vậy chu vi đường tròn ngoại tiếp đó là $C = 2\pi R \approx 31{,}4$ cm.

9.11. Gọi a và h lần lượt là độ dài cạnh và chiều cao của tam giác đều.

Ta có: $\frac{2}{3}h = 3$, hay $h = 4{,}5$ (cm); $\frac{\sqrt{3}}{3}a = 3$, hay $a = 3\sqrt{3}$ (cm).

Chu vi của tam giác là $C = 3a = 9\sqrt{3}$ cm.

Diện tích của tam giác là $S = \frac{1}{2}a \cdot h = \frac{27\sqrt{3}}{4}$ cm^2.

9.12. Gọi a và h lần lượt là độ dài cạnh và chiều cao của tam giác đều.

Ta có: $\frac{1}{3}h = 3$, hay $h = 9$ (cm); $\frac{\sqrt{3}}{6}a = 3$, hay $a = 6\sqrt{3}$ (cm);

Chu vi của tam giác đó là $C = 3a = 18\sqrt{3}$ cm.

Diện tích của tam giác là $S = \frac{1}{2}a \cdot h = 27\sqrt{3}$ cm^2.

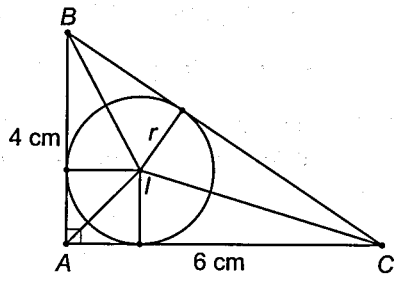
9.13. (H.9.23) Theo định lí Pythagore cho tam giác ABC vuông tại A, ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 16 + 36 = 52$,

hay $BC = 2\sqrt{13}$ (cm).

Diện tích của tam giác ABC là

$S = \frac{1}{2}AB \cdot AC = 12$ cm^2.



Hình 9.23

Gọi $(I; r)$ là đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Khi đó ta có:

$$S = S_{BIC} + S_{CIA} + S_{AIB} = \frac{1}{2}r(BC + CA + AB).$$

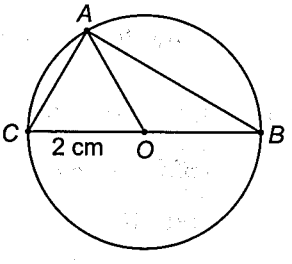
Suy ra $r = \frac{2S}{BC + CA + AB} = \frac{24}{4 + 6 + 2\sqrt{13}} = \frac{12}{5 + \sqrt{13}}$ (cm).

9.14. (H.9.24) Do tam giác ABC vuông tại A nên tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là trung điểm của BC.

Vậy tam giác AOC có: $OA = OC = AC = 2$ cm. Suy ra tam giác AOC đều.

Do đó $\widehat{ACO} = \widehat{AOC} = 60^\circ$.

Vì vậy, ta có: $\widehat{ACB} = \widehat{ACO} = 60^\circ$.



Hình 9.24

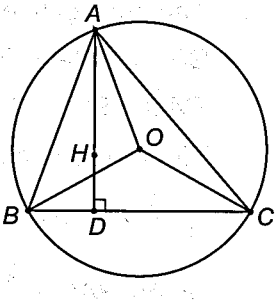
Mặt khác, góc nội tiếp ABC và góc ở tâm AOC của (O) cùng chắn cung nhỏ $\overset{\frown}{AC}$ nên $\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{AOC} = 30^\circ$. Hiển nhiên $\widehat{BAC} = 90^\circ$ vì tam giác ABC vuông tại A.

9.15. (H.9.25) a) Vì góc nội tiếp BAC và góc ở tâm BOC của (O) cùng chắn cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$ nên $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC}$. (1)

Mặt khác, vì tam giác BOC cân tại O nên

$$\widehat{OBC} = \frac{\widehat{OBC} + \widehat{OCB}}{2} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{BOC}) = 90^\circ - \frac{\widehat{BOC}}{2}.$$

Kết hợp đẳng thức trên với (1), ta suy ra $\widehat{OBC} = 90^\circ - \widehat{BAC}$.



Hình 9.25

b) Tương tự như trên, ta có: $\widehat{OAC} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{AOC}) = 90^\circ - \widehat{ABC}$. (2)

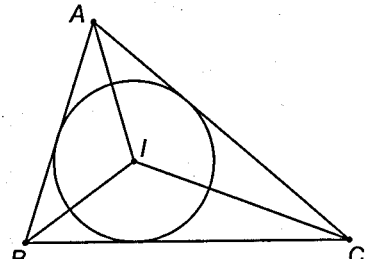
Gọi D là chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC.

Ta có: $\widehat{BAH} = \widehat{BAD} = 90^\circ - \widehat{ABD}$ (vì ΔABD vuông tại D).

Kết hợp đẳng thức trên với (2) ta suy ra $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$.

9.16. (H.9.26) Vì I là giao điểm của các đường phân giác của tam giác ABC nên ta có:

$$\widehat{IBC} = \frac{\widehat{ABC}}{2}; \widehat{ICB} = \frac{\widehat{ACB}}{2}.$$



Hình 9.26

Vì tổng các góc trong tam giác ABC bằng 180° nên $\widehat{IBC} + \widehat{ICB} = \frac{\widehat{ABC} + \widehat{ACB}}{2} = 90^\circ - \frac{\widehat{BAC}}{2}$.

Vì tổng các góc trong tam giác BIC bằng 180° nên:

$$\widehat{BIC} = 180^\circ - \widehat{IBC} - \widehat{ICB} = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\widehat{BAC}}{2}\right) = 90^\circ + \frac{\widehat{BAC}}{2}.$$

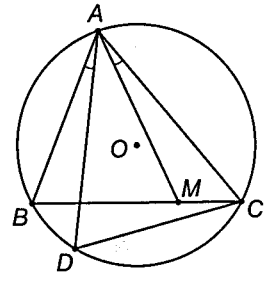
Tương tự, ta có: $\widehat{CIA} = 90^\circ + \frac{\widehat{CBA}}{2}$; $\widehat{AIB} = 90^\circ + \frac{\widehat{ACB}}{2}$.

9.17. (H.9.27) Hai tam giác AMB và ACD có:

$\widehat{ABM} = \widehat{ADC}$ (hai góc nội tiếp của (O) cùng chắn cung $\widehat{AC}$);

$\widehat{BAM} = \widehat{BAC} - \widehat{MAC} = \widehat{BAC} - \widehat{BAD} = \widehat{DAC}$ (theo giả thiết).

Suy ra $\Delta AMB \backsim \Delta ACD$ (g.g).



Hình 9.27

9.18. (H.9.28) Xét trong đường tròn (O), ta có:

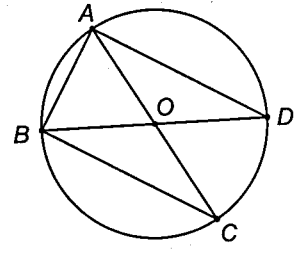
Các góc nội tiếp CBD và CAD cùng chắn cung $\widehat{CD}$ nên $\widehat{CBD} = \widehat{CAD}$. (1)

Góc nội tiếp BAD chắn nửa đường tròn nên $\widehat{BAD} = 90^\circ$. (2)

Từ (1), (2) và giả thiết, ta suy ra

$\frac{3}{2}\widehat{BAC} = \widehat{BAC} + \widehat{CBD} = \widehat{BAC} + \widehat{CAD} = \widehat{BAD} = 90^\circ$.

Do đó $\widehat{BAC} = \frac{2}{3} \cdot 90^\circ = 60^\circ$.



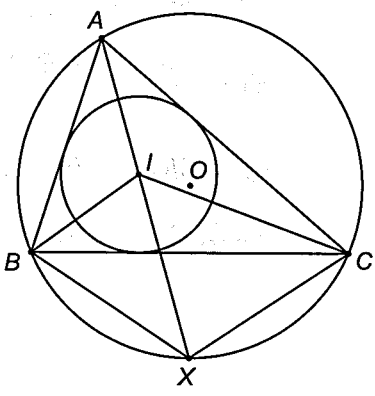
Hình 9.28

9.19. (H.9.29) Vì I là giao điểm của ba đường phân giác của tam giác ABC nên

$$\widehat{IAB} = \frac{\widehat{BAC}}{2}; \widehat{IBA} = \widehat{IBC} = \frac{\widehat{ABC}}{2}.$$

Do vậy, ta có:

$$\widehat{BIX} = 180^o - \widehat{BIA} = \widehat{IAB} + \widehat{IBA}$$
$$= \frac{\widehat{BAC}}{2} + \frac{\widehat{ABC}}{2}. \quad (1)$$



Hình 9.29

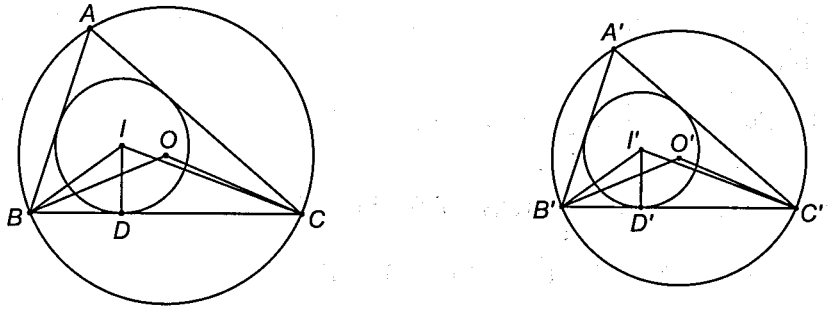
Mặt khác, vì $\widehat{CBX}$ và $\widehat{CAX}$ là các góc nội tiếp của (O) cùng chắn cung $\overset{\frown}{CX}$ nên $\widehat{CBX} = \widehat{CAX}$.

Vì vậy, ta có: $\widehat{IBX} = \widehat{IBC} + \widehat{CBX} = \frac{\widehat{ABC}}{2} + \widehat{CAX} = \frac{\widehat{ABC}}{2} + \frac{\widehat{CAB}}{2}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BIX} = \widehat{IBX}$, hay ΔIBX cân tại X. Do đó $XI = XB$.

Tương tự $XI = XC$. Vậy X là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔBIC.

9.20. (H.9.30)



Hình 9.30

Ta có: $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$ (góc ở tâm và góc nội tiếp của (O) cùng chắn cung $\overset{\frown}{BC}$), $\widehat{B'O'C'} = 2\widehat{B'A'C'}$ (góc ở tâm và góc nội tiếp của (O') cùng chắn cung $\overset{\frown}{B'C'}$).

Xét ΔBOC và $\Delta B'O'C'$, ta có: $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC} = 2\widehat{B'A'C'} = \widehat{B'O'C'}$;

$$\widehat{CBO} = \frac{180^o - \widehat{BOC}}{2} = \frac{180^o - \widehat{B'O'C'}}{2} = \widehat{C'B'O'}.$$

Vậy $\Delta BOC \backsim \Delta B'O'C'$ (g.g).

Suy ra $\frac{R}{R'} = \frac{OB}{O'B'} = \frac{BC}{B'C'} = k$.

Xét ΔBIC và $\Delta B'I'C'$, ta có:

$\widehat{IBC} = \dfrac{\widehat{ABC}}{2} = \dfrac{\widehat{A'B'C'}}{2} = \widehat{I'B'C'}$; $\widehat{ICB} = \dfrac{\widehat{ACB}}{2} = \dfrac{\widehat{A'C'B'}}{2} = \widehat{I'C'B'}$.

Vậy $\Delta BIC \backsim \Delta B'I'C'$ (g.g). Do đó $\dfrac{IB}{I'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = k$.

Gọi D, D' lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ I, I' xuống BC, $B'C'$. Ta có:

$$\frac{r}{r'} = \frac{ID}{I'D'} = \frac{IB \cdot \cos\widehat{IBC}}{I'B' \cdot \cos\widehat{I'B'C'}} = \frac{IB}{I'B'} = k.$$

BÀI 29. TỨ GIÁC NỘI TIẾP

9.21. Số đo các góc còn lại của tứ giác nội tiếp $ABCD$ trong mỗi trường hợp như sau:

a) $\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} = 100^\circ$; $\widehat{D} = 180^\circ - \widehat{B} = 60^\circ$.

b) $\widehat{D} = 180^\circ - \widehat{B} = 110^\circ$; $\widehat{A} = 180^\circ - \widehat{C} = 70^\circ$.

c) $\widehat{A} = 180^\circ - \widehat{C} = 70^\circ$; $\widehat{B} = 180^\circ - \widehat{D} = 120^\circ$.

d) $\widehat{B} = 180^\circ - \widehat{D} = 115^\circ$; $\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} = 50^\circ$.

9.22. Số đo các góc của tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) trong mỗi trường hợp như sau:

a) $\widehat{A} = \widehat{DAC} + \widehat{CAB} = \dfrac{1}{2}(\widehat{COD} + \widehat{BOC}) = 95^\circ$;

$\widehat{D} = \widehat{ADB} + \widehat{BDC} = \dfrac{1}{2}(\widehat{AOB} + \widehat{BOC}) = 110^\circ$;

$\widehat{B} = 180^\circ - \widehat{D} = 70^\circ$; $\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} = 85^\circ$.

b) $\widehat{A} = \widehat{DAC} + \widehat{CAB} = \dfrac{1}{2}(\widehat{COD} + \widehat{BOC}) = 90^\circ$;

$\widehat{B} = \widehat{ABD} + \widehat{DBC} = \dfrac{1}{2}(\widehat{DOA} + \widehat{COD}) = 85^\circ$;

$\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} = 90^\circ$; $\widehat{D} = 180^\circ - \widehat{B} = 95^\circ$.

9.23. (H.9.31) Vì tổng các góc trong tam giác ABE bằng 180° nên:

$\widehat{BAC} = \widehat{BAE} = 180^\circ - \widehat{AEB} - \widehat{ABE} = 30^\circ$.

Xét trong đường tròn (O), ta có:

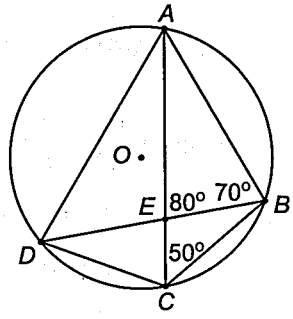
$\widehat{ACD} = \widehat{ABE} = 70^\circ$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{AD}$);

$\overset{\frown}{ADB} = \overset{\frown}{ECB} = 50^o$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AB}$);

$\overset{\frown}{CDB} = \overset{\frown}{BAC} = 30^o$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{CB}$).

Suy ra $\overset{\frown}{BCD} = \overset{\frown}{ECB} + \overset{\frown}{ACD} = 120^o$;

$\overset{\frown}{CDA} = \overset{\frown}{CDB} + \overset{\frown}{ADB} = 80^o$.



Hình 9.31

Vì các cặp góc đối nhau của tứ giác nội tiếp $ABCD$ có tổng bằng 180^o nên:

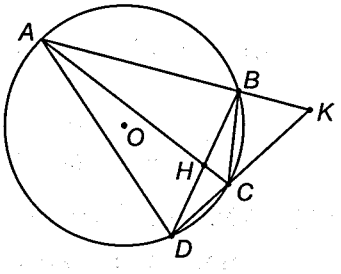
$\overset{\frown}{DAB} = 180^o - \overset{\frown}{BCD} = 60^o$, $\overset{\frown}{ABC} = 180^o - \overset{\frown}{CDA} = 100^o$.

9.24. (H.9.32) a) Vì các góc nội tiếp $\overset{\frown}{ABD}$ và $\overset{\frown}{BDC}$ của (O) lần lượt chắn cung $\overset{\frown}{AD}$ và $\overset{\frown}{BC}$ nên

$\overset{\frown}{ABD} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AD}$; $\overset{\frown}{BDC} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BC}$.

Do đó $\overset{\frown}{BKC} = \overset{\frown}{ABD} - \overset{\frown}{BDK} = \overset{\frown}{ABD} - \overset{\frown}{BDC}$

$= \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AD} - \text{sđ}\overset{\frown}{BC}\right)$.



Hình 9.32

b) Vì góc nội tiếp BAC của (O) chắn cung $\overset{\frown}{BC}$ nên $\overset{\frown}{BAC} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BC}$.

Do đó $\overset{\frown}{BHC} = \overset{\frown}{ABH} + \overset{\frown}{BAH} = \overset{\frown}{ABD} + \overset{\frown}{BAC} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AD} + \text{sđ}\overset{\frown}{BC}\right)$.

9.25. (H.9.33)

a) Ta có: $\overset{\frown}{BAD} + \overset{\frown}{BCD} = 180^o$ (hai góc đối nhau của tứ giác nội tiếp $ABCD$).

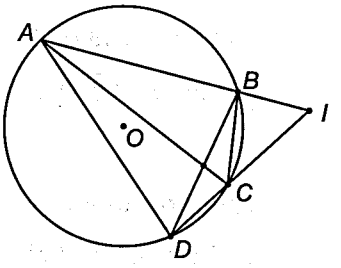
Hai tam giác IAD và ICB có: $\overset{\frown}{AID} = \overset{\frown}{CIB}$ (góc chung);

$\overset{\frown}{IAD} = \overset{\frown}{BAD} = 180^o - \overset{\frown}{BCD} = \overset{\frown}{ICB}$.

Vậy $\Delta IAD \backsim \Delta ICB$ (g.g).

Hai tam giác IAC và IDB có: $\overset{\frown}{AIC} = \overset{\frown}{DIB}$ (góc chung); $\overset{\frown}{IAC} = \overset{\frown}{IDB}$ (hai góc nội tiếp của (O) cùng chắn cung $\overset{\frown}{BC}$).

Vậy $\Delta IAC \backsim \Delta IDB$ (g.g).



Hình 9.33

b) Vì $\Delta IAD \backsim \Delta ICB$ và $\Delta IAC \backsim \Delta IDB$ nên ta có: $\frac{IC}{IA} = \frac{BC}{AD}; \frac{IA}{ID} = \frac{AC}{BD}$.

Suy ra $\frac{IC}{ID} = \frac{IC}{IA} \cdot \frac{IA}{ID} = \frac{AC}{AD} \cdot \frac{BC}{BD}$.

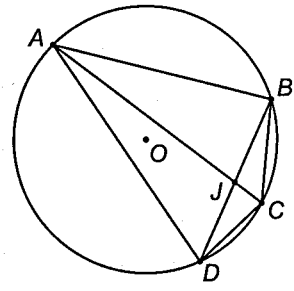
9.26. (H.9.34) a) Hai tam giác *JAD* và *JBC* có:

$\widehat{AJD} = \widehat{BJC}$ (hai góc đối đỉnh);

$\widehat{JAD} = \widehat{JBC}$ (hai góc nội tiếp của (*O*) cùng chắn cung $\overset{\frown}{DC}$).

Vậy $\Delta JAD \backsim \Delta JBC$ (g.g).

Tương tự $\Delta JAB \backsim \Delta JDC$.



Hình 9.34

b) Vì $\Delta JAD \backsim \Delta JBC$ và $\Delta JAB \backsim \Delta JDC$ nên ta có: $\frac{JA}{JB} = \frac{DA}{BC}; \frac{JB}{JC} = \frac{BA}{DC}$.

Suy ra $\frac{JA}{JC} = \frac{JA}{JB} \cdot \frac{JB}{JC} = \frac{BA}{BC} \cdot \frac{DA}{DC}$.

9.27. a) Nếu một hình bình hành nội tiếp một đường tròn thì hai góc đối nhau của chúng bằng nhau và có tổng bằng 180°. Do vậy mỗi góc đó đều vuông và hình bình hành đó phải là hình chữ nhật;

b) Nếu một hình thoi nội tiếp một đường tròn thì theo câu a hình thoi đó phải là hình chữ nhật. Vì hình chữ nhật này có các cạnh bằng nhau nên phải là hình vuông.

c) Giả sử hình thang *ABCD* (*AB // CD*) nội tiếp một đường tròn.

Khi đó: $\widehat{A} = 180^\circ - \widehat{D} = \widehat{B}$. Do vậy *ABCD* là hình thang cân.

9.28. (H.9.35) Do *QAM* là tam giác vuông cân tại *A* nên

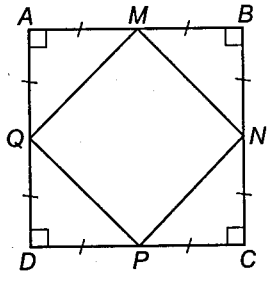
$QM = \sqrt{QA^2 + MA^2} = \sqrt{2}QA = 2\sqrt{2}$ cm.

Tương tự, $MN = NP = PQ = QM = 2\sqrt{2}$ cm.

Vậy *MNPQ* là hình thoi.

Mặt khác, $\widehat{MNP} = 180^\circ - \widehat{MNB} - \widehat{PNC}$

$= 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$.



Hình 9.35

Vậy hình thoi *MNPQ* có một góc vuông và do đó là hình vuông có cạnh $2\sqrt{2}$ cm và có đường chéo $MP = \sqrt{MQ^2 + QP^2} = 4$ cm.

Vì vậy $MNPQ$ nội tiếp một đường tròn có tâm là trung điểm của MP và bán kính bằng $\frac{MP}{2} = 2$ cm.

Chu vi của đường tròn là $C = 2\pi \cdot 2 \approx 12{,}56$ (cm).

9.29. Hình vuông $ABCD$ có diện tích là $S_1 = 3 \cdot 3 = 9$ (cm^2).

Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 3\sqrt{2}$ cm.

Đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ có bán kính bằng một nửa đường chéo và bằng $R = \frac{AC}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm.

Diện tích của hình tròn là $S_2 = \pi R^2 = 14{,}13$ cm^2.

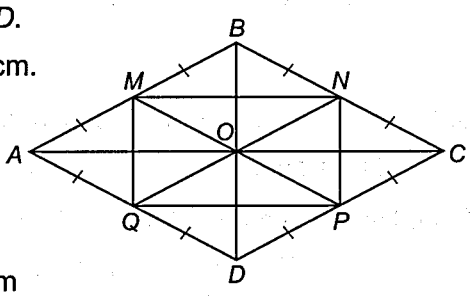
Tổng diện tích của bốn hình viên phân là $S = S_2 - S_1 = 5{,}13$ cm^2.

9.30. (H.9.36) Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Khi đó $OA = OC = 4$ cm; $OB = OD = 2$ cm.

Vì tam giác AOB vuông tại O nên

$$BC = CD = DA = AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = 2\sqrt{5} \text{ cm.}$$



Hình 9.36

Vì M là trung điểm của AB nên M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB và

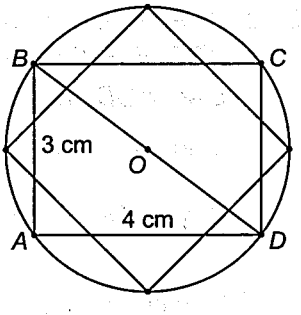
$$MO = MA = MB = \frac{AB}{2} = \sqrt{5} \text{ cm.}$$

Tương tự, ta có: $MO = NO = PO = QO = \sqrt{5}$ cm. Vậy tứ giác $MNPQ$ nội tiếp một đường tròn (O) bán kính bằng $\sqrt{5}$ cm.

9.31. (H.9.37) Hình chữ nhật $ABCD$ có đường chéo: $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 5$ cm.

Đường tròn (O) có tâm O là trung điểm của BD và bán kính $R = \frac{BD}{2} = 2{,}5$ cm.

Hình vuông nội tiếp (O) có cạnh bằng a, có đường chéo bằng $\sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$.



Hình 9.37

Vì đường tròn (O) ngoại tiếp hình vuông nên $R = \dfrac{\sqrt{2}a}{2}$, hay $a = \dfrac{2R}{\sqrt{2}} = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$ cm.

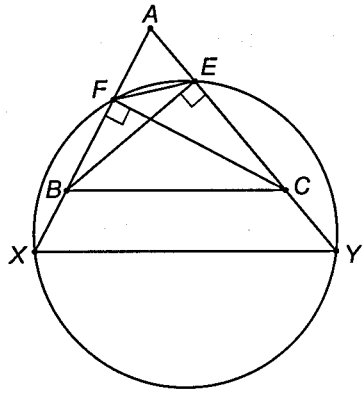
Hình vuông có diện tích là $S = a^2 = 12{,}5\ \text{cm}^2$.

9.32. (H.9.38) Vì các tam giác vuông BEC, BFC có chung cạnh huyền BC nên bốn điểm B, F, E, C cùng nằm trên đường tròn có tâm là trung điểm của BC và bán kính $\dfrac{BC}{2}$. Do đó $BFEC$ là tứ giác nội tiếp.

Vì tổng các góc đối nhau của các tứ giác nội tiếp $BFEC$ và $XFEY$ bằng 180° nên:

$\widehat{FBC} = 180^\circ - \widehat{FEC} = 180^\circ - \widehat{FEY} = \widehat{FXY}$.

Do đó $BC // XY$ (hai góc đồng vị bằng nhau).



Hình 9.38

BÀI 30. ĐA GIÁC ĐỀU

9.33. Tam giác đều, hình vuông và lục giác đều là các đa giác đều.

Hình tròn, hình bình hành và hình chữ nhật không phải là đa giác đều.

9.34. Hình a là hình vuông nên là hình có dạng đa giác đều.

Hình b là hình chữ nhật với hai cạnh khác nhau nên không phải hình có dạng đa giác đều.

Hình c là lục giác có các cạnh khác nhau nên không phải hình có dạng đa giác đều.

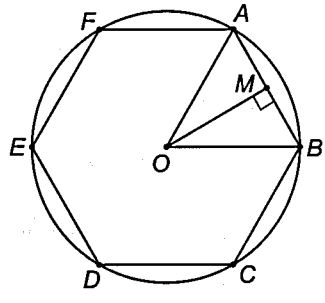
Hình d không có dạng đa giác lồi nên không phải hình có dạng đa giác đều.

9.35. Hình d là hình vẽ hai điểm M, N thoả mãn phép quay ngược chiều 60° tâm O biến N thành M.

9.36. (H.9.39) Gọi a là độ dài cạnh của lục giác đều $ABCDEF$. Gọi M là trung điểm của AB. Vì tam giác AOB đều nên $OM \perp AB$ và OM là phân giác của $\widehat{AOB}$.

Suy ra $OM = \sin\widehat{OAM} \cdot OA = \sin 60^\circ \cdot a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

Vậy khoảng cách từ O đến AB bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

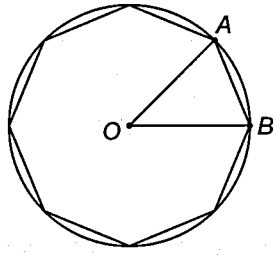


Hình 9.39

Tương tự, khoảng cách từ O đến tất cả các cạnh của lục giác đều bằng nhau và đều bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

9.37. (H.9.40) Gọi AB là một cạnh tuỳ ý của bát giác đều. Góc AOB là góc ở tâm của đường tròn (O) chắn một cung bằng $\frac{1}{8}$ đường tròn. Do đó

$$\overset{\frown}{AOB} = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ.$$



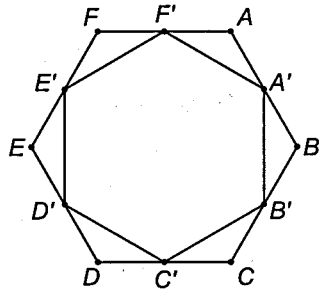
Hình 9.40

Vì tam giác AOB cân tại đỉnh O nên ta có:

$$\overset{\frown}{OAB} = \overset{\frown}{OBA} = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{OAB} + \overset{\frown}{OBA}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(180^\circ - \overset{\frown}{AOB}\right) = 67{,}5^\circ.$$

9.38. Theo Hình 9.41, ta thấy $A'B'C'D'E'F'$ là một lục giác lồi. Xét hai tam giác $F'AA'$ và $A'BB'$, ta có:



Hình 9.41

$$AF' = \frac{AF}{2} = \frac{BA}{2} = BA';$$

$$AA' = \frac{AB}{2} = \frac{BC}{2} = BB';$$

$$\overset{\frown}{F'AA'} = \overset{\frown}{FAB} = \overset{\frown}{ABC} = \overset{\frown}{A'BB'}.$$

Vậy $\Delta F'AA' = \Delta A'BB'$ (c.g.c). Suy ra $F'A' = A'B'$.

Tương tự, ta có: $A'B' = B'C' = C'D' = D'E' = E'F' = F'A'$.

Hơn nữa, lục giác đều $ABCDEF$ nội tiếp một đường tròn và mỗi góc của lục giác đều chắn một cung bằng $\frac{4}{6}$ đường tròn đó.

Do đó $\overset{\frown}{F'AA'} = \overset{\frown}{A'BB'} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}\cdot 360^\circ = 120^\circ$.

Suy ra:

$$\overset{\frown}{F'A'B'} = 180^\circ - \overset{\frown}{F'A'A} - \overset{\frown}{B'A'B}$$

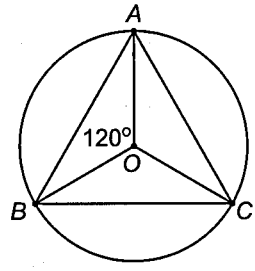
$$= 180^\circ - \frac{1}{2}\left(180^\circ - \overset{\frown}{F'AA'}\right) - \frac{1}{2}\left(180^\circ - \overset{\frown}{A'AB'}\right) = 120^\circ.$$

Tương tự, các góc còn lại của lục giác $A'B'C'D'E'F'$ cũng bằng 120°.

Do đó lục giác $A'B'C'D'E'F'$ đều.

9.39. (H.9.42) Các phép quay thuận chiều lần lượt 120^o, 240^o, 360^o với tâm O biến các đỉnh A, B, C thành những điểm tương ứng được cho bởi bảng dưới đây:

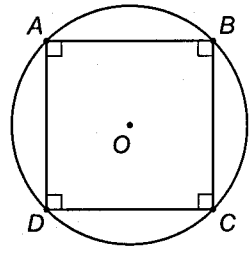
Đỉnh / Phép quay	A	B	C
120^o	C	A	B
240^o	B	C	A
360^o	A	B	C



Hình 9.42

9.40. (H.9.43) Các phép quay ngược chiều lần lượt 90^o, 180^o, 270^o, 360^o với tâm O biến các đỉnh A, B, C, D thành những điểm tương ứng được cho bởi bảng sau:

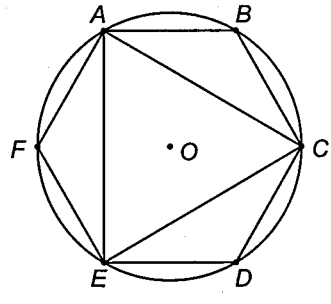
Đỉnh / Phép quay	A	B	C	D
90^o	D	A	B	C
180^o	C	D	A	B
270^o	B	C	D	A
360^o	A	B	C	D



Hình 9.43

9.41. (H.9.44) a) Mỗi góc của tam giác ACE là một góc nội tiếp của (O) và chắn một cung bằng $\frac{2}{6}$ của đường tròn. Do đó mỗi góc của tam giác ACE có độ lớn bằng $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} \cdot 360^o = 60^o$.

Vậy tam giác ACE là tam giác đều.

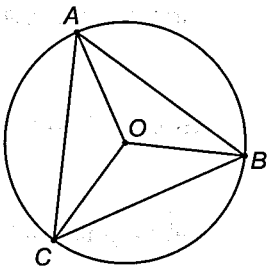


Hình 9.44

b) Vì tam giác đều ACE nội tiếp (O) nên các phép quay thuận chiều lần lượt 120^o, 240^o, 360^o với tâm O giữ nguyên tam giác đều ACE.

c) Sáu phép quay giữ nguyên lục giác đều $ABCDEF$ là các phép quay thuận chiều 60^o, 120^o, 180^o, 240^o, 300^o, 360^o với tâm O.

9.42. (H.9.45) Ta có $OA = OB = OC$. Vậy tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O).



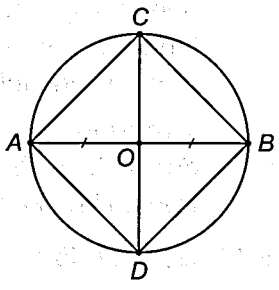
Hình 9.45

Hơn nữa các cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}$ có số đo bằng 120°. Vì $\widehat{ACB}$ và $\widehat{BAC}$ là các góc nội tiếp của (O) lần lượt chắn cung $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}$ nên

$$\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AB} = 60^\circ;\ \widehat{BAC} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BC} = 60^\circ.$$

Suy ra $\widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{ACB} - \widehat{BAC} = 60^\circ$. Do vậy tam giác ABC có ba góc bằng nhau và là tam giác đều.

9.43. (H.9.46) a) Phép quay thuận chiều 180° tâm O biến A thành B và biến B thành A.



Hình 9.46

b) Ta thấy $OC = OA = OB = OD$. Vậy tứ giác $ACBD$ nội tiếp đường tròn (O), bán kính $\frac{AB}{2}$.

Hơn nữa $\widehat{AOC} = \widehat{BOD} = 90^\circ$, hay OC và OD cùng vuông góc với AB. Do đó O, C, D thẳng hàng. Vậy CD là đường kính của (O). Do vậy

$\widehat{ACB} = \widehat{CBD} = \widehat{BDA} = \widehat{DAC} = 90^\circ$ (các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn của (O)). Suy ra $ACBD$ là hình chữ nhật.

Hơn nữa, $\Delta AOC = \Delta COB = \Delta BOD = \Delta DOA$ (các tam giác vuông cân tại đỉnh O có các cạnh góc vuông bằng nhau).

Do đó $AC = CB = BD = DA$. Vậy hình chữ nhật $ACBD$ là hình vuông.

ÔN TẬP CHƯƠNG IX

A. CÂU HỎI (Trắc nghiệm)

1. B. **2.** C. **3.** A.

B. BÀI TẬP

9.44. Xét trong một đường tròn: những câu a, b là đúng; câu c, d sai.

9.45. Vì tổng ba góc trong tam giác ABC bằng 180° nên $\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = 50^\circ$.

Xét đường tròn (O), ta có:

Góc nội tiếp BAC và góc ở tâm BOC cùng chắn cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$ nên

$$\overset{\frown}{BOC} = 2\overset{\frown}{BAC} = 120^\circ;$$

Góc nội tiếp CBA và góc ở tâm COA cùng chắn cung nhỏ $\overset{\frown}{CA}$ nên

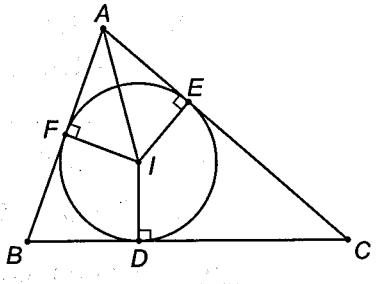
$$\overset{\frown}{COA} = 2\overset{\frown}{CBA} = 140^\circ;$$

Góc nội tiếp ACB và góc ở tâm AOB cùng chắn cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ nên

$$\overset{\frown}{AOB} = 2\overset{\frown}{ACB} = 100^\circ.$$

9.46. (H.9.47) Vì (I) tiếp xúc AC, AB tại E và F nên $\overset{\frown}{IFA} = \overset{\frown}{IEA} = 90^\circ$. Như vậy hai tam giác vuông IFA và IEA có chung cạnh huyền AI nên chúng cùng nội tiếp đường tròn đường kính AI. Suy ra tứ giác $IEAF$ nội tiếp đường tròn đường kính AI.

Tương tự tứ giác $IFBD$ nội tiếp đường tròn đường kính BI, tứ giác $IDCE$ nội tiếp đường tròn đường kính CI.



Hình 9.47

9.47. Gọi a là độ dài cạnh của tam giác đều ABC. Do tam giác ABC nội tiếp một đường tròn bán kính 4 cm nên $4 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$, hay $a = 4\sqrt{3}$ (cm).

Đường tròn nội tiếp của tam giác ABC có bán kính là $r = \dfrac{\sqrt{3}}{6}a = 2$ cm.

9.48. Gọi a, b lần lượt là độ dài cạnh góc vuông và độ dài cạnh huyền của tam giác vuông cân đã cho. Vì đường tròn ngoại tiếp tam giác này có bán kính 4 cm nên $4 = \dfrac{b}{2}$, hay $b = 8$ (cm).

Theo định lí Pythagore, ta có: $a^2 + a^2 = b^2 = 64$, hay $a = 4\sqrt{2}$ (cm).

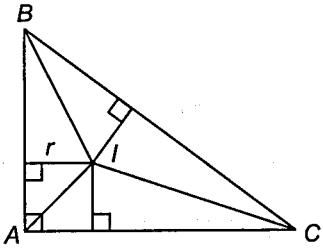
Suy ra diện tích của tam giác đã cho là

$$S = \frac{1}{2}a^2 = 16 \text{ cm}^2.$$

9.49. (H.9.48) Vì bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông bằng một nửa cạnh huyền của tam giác nên $BC = 2 \cdot 5 = 10$ (cm).

Theo định lí Pythagore, ta có:

$AB^2 + AC^2 = BC^2 = 100$ cm^2.



Hình 9.48

Vì diện tích tam giác ABC bằng 24 cm^2 nên $\frac{1}{2}AB \cdot AC = 24\ cm^2$.

Từ đây suy ra $(AB + AC)^2 = AB^2 + 2AB \cdot AC + AC^2 = 196$,

hay $AB + AC = 14$ (cm).

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp và r là bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Khi đó r cũng là chiều cao hạ từ đỉnh I xuống các cạnh BC, CA, AB của các tam giác BIC, CIA, AIB.

Do đó $S_{ABC} = S_{BIC} + S_{CIA} + S_{AIB} = \frac{1}{2}BC \cdot r + \frac{1}{2}CA \cdot r + \frac{1}{2}AB \cdot r$

$= \frac{1}{2}(BC + CA + AB)r.$

Suy ra $24 = \frac{1}{2}(10 + 14)r$, hay $r = 2$ cm.

9.50. Số đo các góc còn lại của tứ giác nội tiếp $ABCD$ trong mỗi trường hợp được cho như sau:

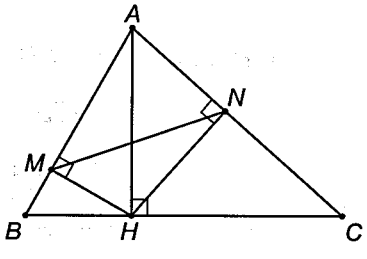
a) $\widehat{C} = 180^o - \widehat{A} = 100^o$, $\widehat{B} = 180^o - \widehat{D} = 80^o$;

b) $\widehat{D} = 180^o - \widehat{B} = 100^o$, $\widehat{C} = 180^o - \widehat{A} = 70^o$;

c) $\widehat{A} = 180^o - \widehat{C} = 60^o$, $\widehat{D} = 180^o - \widehat{B} = 120^o$;

d) $\widehat{B} = 180^o - \widehat{D} = 115^o$, $\widehat{A} = 180^o - \widehat{C} = 55^o$.

9.51. (H.9.49) Do $\widehat{AMH} = \widehat{ANH} = 90^o$ nên hai tam giác vuông AMH, ANH có chung cạnh huyền AH và do đó cùng nội tiếp đường tròn đường kính AH. Vậy tứ giác $AMHN$ nội tiếp một đường tròn. Khi đó, hai góc nội tiếp AMN và AHN của đường tròn này cùng chắn cung $\overset{\frown}{AN}$ nên $\widehat{AMN} = \widehat{AHN}$.



Hình 9.49

Hai tam giác AMN và ACB có:

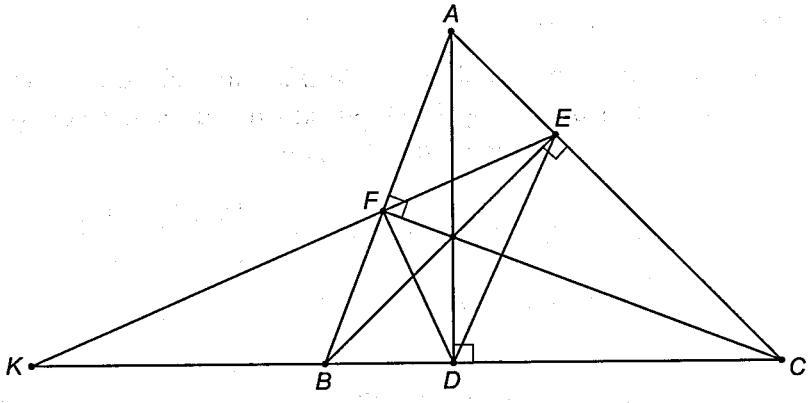
$\widehat{AMN} = \widehat{AHN} = 90^o - \widehat{HAN} = \widehat{ACB}$ (chứng minh trên);

$\widehat{MAN} = \widehat{CAB}$ (góc chung).

Vậy $\Delta AMN \backsim \Delta ACB$ (g.g).

Suy ra $\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB}$, hay $AM \cdot AB = AN \cdot AC$.

9.52. (H.9.50) Ta thấy $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^o$ nên tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn đường kính BC. Tương tự, tứ giác $AFDC$ nội tiếp đường tròn đường kính AC, tứ giác $AEBD$ nội tiếp đường tròn đường kính AB.



Hình 9.50

a) Vì tổng các góc đối nhau của tứ giác nội tiếp $BFEC$ bằng 180^o nên:

$$\widehat{KFB} = 180^o - \widehat{BFE} = \widehat{BCE}.$$

Hai tam giác KFB và KCE có:

$\widehat{KFB} = \widehat{BCE} = \widehat{KCE}$ (chứng minh trên);

$\widehat{FKB} = \widehat{CKE}$ (góc chung).

Vậy $\Delta KFB \backsim \Delta KCE$ (g.g). Suy ra $\dfrac{KF}{KC} = \dfrac{KB}{KE}$, hay $KB \cdot KC = KE \cdot KF$.

b) Hai tam giác KEB và KCF có:

$\widehat{KEB} = \widehat{KCF}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{BF}$ của đường tròn đường kính BC);

$\widehat{EKB} = \widehat{CKF}$ (góc chung).

Vậy $\Delta KEB \backsim \Delta KCF$ (g.g). Suy ra $\dfrac{KE}{KC} = \dfrac{EB}{CF}$.

Mặt khác, $\dfrac{KB}{KE} = \dfrac{FB}{CE}$ (vì $\Delta KFB \backsim \Delta KCE$).

Do đó $\dfrac{KB}{KC} = \dfrac{KB}{KE} \cdot \dfrac{KE}{KC} = \dfrac{BF}{CF} \cdot \dfrac{BE}{CE}$. (1)

Tương tự, hai tam giác BDF và BAC có:

$$\widehat{BDF} = 180^\circ - \widehat{FDC} = \widehat{BAC};\ \widehat{DBF} = \widehat{ABC}.$$

Vậy $\Delta BDF \backsim \Delta BAC$ (g.g).

Suy ra $\frac{DB}{AB} = \frac{BF}{BC}$. Tương tự, $\frac{DC}{AC} = \frac{CE}{BC}$.

Do đó $\frac{DB}{DC} = \frac{BF}{CE} \cdot \frac{AB}{AC}$. (2)

Hơn nữa $\Delta ABE \backsim \Delta ACF$ (hai tam giác vuông có chung góc nhọn $\widehat{A}$).

Do đó $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CF}$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\frac{KB}{KC} = \frac{DB}{DC}$.

9.53. Đường tròn ngoại tiếp tam giác đều cạnh 3 cm có bán kính là

$$R = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 3 = \sqrt{3}\ (\text{cm}).$$

Vậy lục giác đều có cạnh $a = R = \sqrt{3}$ cm.

Chu vi của lục giác đều là

$$C = 6 \cdot a = 6\sqrt{3}\ \text{cm}.$$

Lục giác đều là hợp của 6 tam giác đều cạnh a, chiều cao $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, nên có diện tích là:

$$S = 6 \cdot \frac{ah}{2} = 9\sqrt{3}\ \text{cm}^2.$$

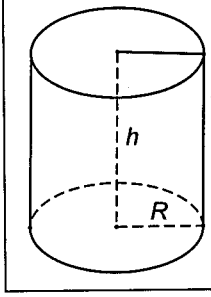
9.54. a) Các đoạn thẳng nối O với các đỉnh của $\mathcal{H}$ và thu được 12 góc nhọn tại đỉnh O (không chồng lên nhau). Mỗi góc nhọn này là một góc ở tâm của (O) và chắn một cung bằng $\frac{1}{12}$ đường tròn, do đó mỗi góc nhọn này có số đo bằng $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$.

b) Có 12 phép quay giữ nguyên $\mathcal{H}$ là các phép quay thuận chiều lần lượt 30°, 60°, 90°, 120°, 150°, 180°, 210°, 240°, 270°, 300°, 330°, 360° với tâm O.

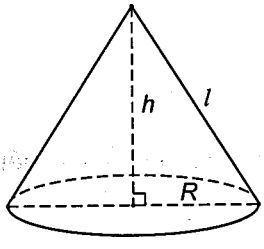
CHƯƠNG X. MỘT SỐ HÌNH KHỐI TRONG THỰC TIỄN

BÀI 31. HÌNH TRỤ VÀ HÌNH NÓN

10.1.

Hình	Bán kính đáy (cm)	Chiều cao (cm)	Diện tích xung quanh (cm^2)	Thể tích (cm^3)
	5	4	40π	100π
	6	8	96π	288π
	4	10	80π	160π

10.2.

Hình	Bán kính đáy (cm)	Chiều cao (cm)	Độ dài đường sinh (cm)	Diện tích xung quanh (cm^2)	Thể tích (cm^3)
	6	8	10	60π	96π
	5	12	13	65π	100π

10.3. Bán kính đáy của khối gỗ hình trụ là $R = 20 : 2 = 10$ (cm).

Diện tích xung quanh của khối gỗ hình trụ là

$$S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 10 \cdot 30 = 600\pi \ (cm^2).$$

Diện tích hai đáy của khối gỗ hình trụ là

$$S = 2\pi R^2 = 2 \cdot \pi \cdot 10^2 = 200\pi \ (cm^2).$$

Diện tích phần cần sơn là $600\pi + 200\pi = 800\pi \approx 2\,513{,}3$ (cm^2).

10.4. Bán kính đáy của chiếc mũ hình nón là $R = 16 : 2 = 8$ (cm).

Diện tích giấy bìa màu bạn Trang cần dùng là

$$S = \pi Rl = \pi \cdot 8 \cdot 17 = 136\pi \approx 427 \ (cm^2).$$

10.5. Bán kính của đường tròn đáy là $R = 5 : 2 = 2,5$ (cm).

Diện tích xung quanh của trục lăn sơn hình trụ là

$$S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 2,5 \cdot 23 = 115\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Sau khi lăn trọn vẹn liên tục 15 vòng thì diện tích phần sơn được là:

$$S = 15 \cdot 115\pi = 1\,725\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

10.6. Bán kính đáy của vỏ lon nước ngọt là $R = 6,4 : 2 = 3,2$ (cm).

Diện tích toàn phần một vỏ lon nước ngọt là:

$$S = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi \cdot 3,2^2 + 2\pi \cdot 3,2 \cdot 12 = \frac{2432\pi}{25} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Diện tích nhôm cần dùng để sản xuất 2 000 vỏ lon là:

$$\frac{2432\pi}{25} \cdot 2000 = 194\,560\pi \approx 611\,000 \text{ (cm}^2\text{)} \approx 61,1 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Số tiền công ty phải chi để sản xuất 2 000 vỏ lon là khoảng

$$61,1 \cdot 100\,000 = 6\,110\,000 \text{ (đồng)}.$$

10.7. Thể tích của hình trụ là $V_1 = \pi \cdot 10^2 \cdot 30 = 3000\pi \text{ (cm}^3\text{)}$.

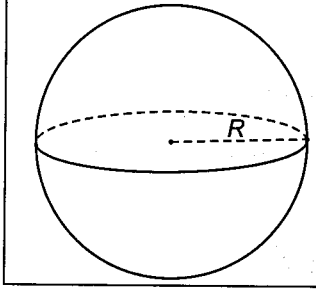
Thể tích của hình nón là $V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot 10^2 \cdot 20 = \frac{2000\pi}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$.

Thể tích của dụng cụ này là

$$V = V_1 + V_2 = 3000\pi + \frac{2\,000}{3}\pi = \frac{11\,000}{3}\pi \approx 11\,519 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

BÀI 32. HÌNH CẦU

10.8.

Hình	Bán kính (cm)	Diện tích mặt cầu (cm^2)	Thể tích hình cầu (cm^3)
	9	324π	972π
	3	36π	36π
	4	64π	$\frac{256\pi}{3}$

10.9. a) Gọi R là bán kính hình cầu. Vì thể tích của hình cầu là 288π cm^3 nên ta có $\frac{4}{3}\pi R^3 = 288\pi$ hay $R^3 = 216$. Suy ra $R = 6$ cm.

b) Diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 4 \cdot \pi \cdot 6^2 = 144\pi$ (cm^2).

10.10. Bán kính của quả bóng là $R = 20 : 2 = 10$ (cm).

Diện tích bề mặt của quả bóng thám không là

$$S = 4\pi R^2 = 4 \cdot \pi \cdot 10^2 \approx 1\,257 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

10.11. Bán kính của chiếc chao đèn là $R = 40 : 2 = 20$ (cm).

Diện tích bề mặt của 100 chiếc chao đèn là

$$S = 1000 \cdot \frac{1}{2} 4\pi R^2 = 2000 \cdot \pi \cdot 20^2 \approx 2\,513\,000 \text{ (cm}^2\text{)} \approx 251{,}3 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Chi phí để sơn 1 000 chiếc chao đèn là khoảng

$$251{,}3 \cdot 100\,000 = 25\,130\,000 \text{ (đồng)}.$$

10.12. Bán kính của quả bóng là $R = 18 : 2 = 9$ (cm).

Thể tích của quả bóng hình cầu là

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 9^3 = 972\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

10.13. Diện tích vỏ hộp cần sơn là

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4\pi R^2 + 2\pi Rh = \frac{1}{2} \cdot 4\pi \cdot 5^2 + 2\pi \cdot 5 \cdot 6 = 110\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

ÔN TẬP CHƯƠNG X

A. CÂU HỎI (Trắc nghiệm)

1. A. **2.** D. **3.** B. **4.** A. **5.** A. **6.** C. **7.** B. **8.** C. **9.** D. **10.** B.

B. BÀI TẬP

10.14. a) Bán kính đáy của khối gỗ hình trụ là $R = 30 : 2 = 15$ (cm).

Thể tích khối gỗ là $V = \pi R^2 h = \pi \cdot 15^2 \cdot 50 = 11\,250\pi$ (cm^3).

b) Diện tích xung quanh của khối gỗ hình trụ là

$$S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 15 \cdot 50 = 1\,500\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Diện tích một đáy của khối gỗ hình trụ là $S = \pi R^2 = \pi \cdot 15^2 = 225\pi$ (cm^2).

Diện tích cần sơn là $S = S_{xq} + 2S = 1\,500\pi + 2 \cdot 225\pi = 1\,950\pi \approx 6\,126$ (cm^2).

10.15. Bán kính đáy của nón là $R = 80 : 2 = 40$ (cm).

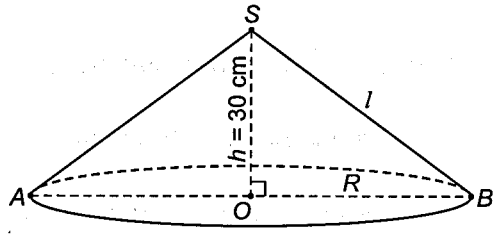
Tam giác SOB vuông tại O nên theo định lí Pythagore ta có:

$SO^2 + OB^2 = SB^2$

$l^2 = 30^2 + 40^2 = 2\,500$ nên $l = 50$ cm.

Diện tích mặt ngoài của chiếc nón là

$S_{xq} = \pi Rl = \pi \cdot 40 \cdot 50 \approx 6\,283$ (cm^2).



10.16. Bán kính của bể cá hình cầu là $R = 22 : 2 = 11$ (cm).

Thể tích nước bạn Khôi đổ vào bể khi nuôi cá là

$$V = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{8}{9}\pi \cdot 11^3 \approx 3\,717 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

10.17. Thể tích V_1 của hình trụ lớn là

$$V_1 = \pi R_1^2 h = \pi \cdot 40^2 \cdot 200 = 320\,000\pi \text{ (cm}^3\text{)} = 320\pi \text{ (dm}^3\text{)}.$$

Thể tích V_2 của hình trụ nhỏ là

$$V_2 = \pi R_2^2 h = \pi \cdot (40 - 15)^2 \cdot 200 = 125\,000\pi \text{ (cm}^3\text{)} = 125\pi \text{ (dm}^3\text{)}.$$

Do đó lượng bê tông cần dùng là $V = V_1 - V_2 = 320\pi - 125\pi = 195\pi$ (dm^3).

10.18. Tổng diện tích của ba quả bóng bàn là $S_1 = 3 \cdot 4\pi R^2 = 12\pi R^2$.

Chiều cao của hộp hình trụ là $h = 3 \cdot 2R = 6R$.

Diện tích xung quanh của vỏ hộp hình trụ là:

$$S_2 = 2\pi Rh = 2\pi R \cdot 6R = 12\pi R^2.$$

Vì vậy $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{12\pi R^2}{12\pi R^2} = 1$.

10.19. Thể tích của khối gỗ hình trụ là $V = \pi \cdot 1^2 \cdot 2 = 2\pi$ (m^3).

Vì đường tròn đáy của hình trụ là đường tròn lớn của mỗi nửa hình cầu nên bán kính của mỗi nửa hình cầu là $R = 1$ m.

Thể tích của hai nửa khối cầu bị khoét đi là $V_1 = 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{3}\pi \cdot 1^3 = \dfrac{4\pi}{3}$ (m^3).

Thể tích phần còn lại của khối gỗ là $V_2 = V - V_1 = 2\pi - \frac{4\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ (m^3).

Vậy tỉ số thể tích cần tìm là $\frac{V_2}{V} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi} = \frac{1}{3}$.

10.20. a) Thể tích phần hình trụ là $V_1 = \pi R^2 h = \pi \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}7 = 0{,}343\pi$ (m^3).

Thể tích phần hình nón là $V_2 = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}9 = 0{,}147\pi$ (m^3).

Thể tích của dụng cụ này là $V = V_1 + V_2 = 0{,}343\pi + 0{,}147\pi = 0{,}49\pi$ (m^3).

b) Diện tích mặt ngoài của dụng cụ gồm diện tích xung quanh của hình trụ và diện tích xung quanh của hình nón.

Đường sinh của hình tròn là $l = \sqrt{0{,}9^2 + 0{,}7^2} \approx 1{,}1$ m.

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_1 = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 \approx 3{,}1$ (m^2).

Diện tích xung quanh của hình nón là $S_2 = \pi Rl = \pi \cdot 0{,}7 \cdot 1{,}1 \approx 2{,}4$ (m^2).

Diện tích mặt ngoài của dụng cụ (không tính nắp đậy) là

$$S = S_1 + S_2 \approx 3{,}1 + 2{,}4 \approx 5{,}5 \text{ } (m^2).$$

BÀI TẬP ÔN TẬP CUỐI NĂM

1. a) Ta có:

$$(x + 2)(x^2 - x + 3) = x^3 + 8$$

$$(x + 2)(x^2 - x + 3) = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

$$(x + 2)(x - 1) = 0.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = -2$ và $x = 1$.

b) Điều kiện của ẩn: $x \neq 0$, $x \neq -1$, $x \neq 4$.

Nhân cả hai vế của phương trình với $x(x + 1)(x - 4)$ để khử mẫu, ta được:

$$11(x + 1)(x - 4) = 9x(x - 4) + 2x(x + 1)$$

$$11x^2 - 33x - 44 = 11x^2 - 34x$$

$$x - 44 = 0$$

$$x = 44.$$

Giá trị này của x thoả mãn điều kiện của ẩn.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 44$.

c) Ta có:

$$(x^2 - 3x)^2 - (x - 4)^2 = 0$$

$$\left[(x^2 - 3x) - (x - 4)\right]\left[(x^2 - 3x) + (x - 4)\right] = 0$$

$$(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 2x - 4) = 0.$$

Trường hợp 1: $x^2 - 4x + 4 = 0$

$(x - 2)^2 = 0$

$x = 2.$

Trường hợp 2: $x^2 - 2x - 4 = 0$

Suy ra $x = 1 + \sqrt{5}$ hoặc $x = 1 - \sqrt{5}$.

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm: $x_1 = 2; x_2 = 1 + \sqrt{5}; x_3 = 1 - \sqrt{5}$.

2. a) Với $m = 1$ ta có hệ $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x + y = 5. \end{cases}$

Từ phương trình thứ nhất suy ra $x = 1 - 3y$. Thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$2(1 - 3y) + y = 5 \text{ hay } -5y = 3, \text{ suy ra } y = -\frac{3}{5}.$$

Do đó $x = 1 - 3 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{14}{5}$.

Vậy với $m = 1$, hệ phương trình đã cho có nghiệm $\left(\frac{14}{5}; -\frac{3}{5}\right)$.

b) Từ phương trình thứ nhất của hệ suy ra $x = 1 - 3y$. Thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$2(1 - 3y) + my = 5 \text{ hay } (m - 6)y = 3. \ (*)$$

– Nếu $m = 6$ thì phương trình (*) trở thành: $0y = 3$. Phương trình này vô nghiệm, do đó hệ phương trình đã cho cũng vô nghiệm.

– Nếu $m \neq 6$ thì phương trình (*) có nghiệm duy nhất $y = \frac{3}{m - 6}$.

Khi đó: $x = 1 - 3y = 1 - \dfrac{9}{m-6}$.

Để x, y đều là số nguyên thì $m - 6$ là ước của 3, tức là $m - 6 \in \{-3;-1;1;3\}$.

Suy ra $m \in \{3;5;7;9\}$. Thử lại thấy đúng.

Vậy các giá trị nguyên của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm nguyên $(x; y)$ là $m \in \{3;5;7;9\}$.

3. a) Ta có:

$$-10x + 7 > 3x - 4$$
$$-10x - 3x > -4 - 7$$
$$-13x > -11$$
$$x < \frac{11}{13}.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < \dfrac{11}{13}$.

b) Ta có: $(9a^2 - 6a) - (-1) = 9a^2 - 6a + 1 = (3a - 1)^2 \geq 0$.

Từ đó suy ra $9a^2 - 6a \geq -1$.

4. a) Ta có:

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{4\sqrt{x}-1}{x-4}\right) : \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$
$$= \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2) - \sqrt{x}(\sqrt{x}+2) + (4\sqrt{x}-1)}{x-4}\right) : \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$
$$= \frac{-1}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{1} = \frac{1}{2-\sqrt{x}}.$$

b) Ta cần tìm x sao cho $A = 1$, tức là $\dfrac{1}{2-\sqrt{x}} = 1$ hay $1 = 2 - \sqrt{x}$, hay $\sqrt{x} = 1$.

Suy ra $x = 1$ (thoả mãn điều kiện của ẩn).

Vậy với $x = 1$ thì $A = 1$.

5. a) Với $m = 1$ ta có phương trình: $x^2 + 4x + 1 = 0$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = -2 + \sqrt{3};\ x_2 = -2 - \sqrt{3}.$$

b) Ta có: $\Delta' = 4 - m$.

Phương trình đã cho có nghiệm khi $\Delta' \geq 0$, tức là $m \leq 4$.

Khi đó phương trình có hai nghiệm x_1, x_2. Theo định lí Viète, ta có:

$$x_1 + x_2 = -4;\ x_1x_2 = m.$$

Ta có: $10 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-4)^2 - 2m = 16 - 2m$. Suy ra $m = 3$.

Giá trị này của m thoả mãn điều kiện để phương trình có nghiệm.

Vậy $m = 3$ thì thoả mãn yêu cầu của đề bài.

6. Gọi x và y lần lượt là số mililít dung dịch muối nồng độ 10% và dung dịch muối nồng độ 60% cần lấy. Điều kiện: $0 < x, y < 250$.

Theo đề bài, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 250 \\ 10\% \cdot x + 60\% \cdot y = 40\% \cdot 250 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x + y = 250 \\ 0{,}1x + 0{,}6y = 100. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta được nghiệm (100; 150). Các giá trị này thoả mãn điều kiện đã đặt của ẩn.

Vậy cần lấy 100 ml dung dịch muối nồng độ 10% và 150 ml dung dịch muối nồng độ 60% để pha được 250 ml dung dịch muối nồng độ 40%.

7. Đổi: 30 phút = $\frac{1}{2}$ giờ.

Gọi vận tốc của xe máy là x (km/h) ($x > 0$), khi đó vận tốc của ô tô là $x + 20$ (km/h).

Thời gian đi từ A đến B của xe máy là $\frac{60}{x}$ (giờ).

Thời gian đi từ A đến B của ô tô là $\frac{60}{x + 20}$ (giờ).

Do ô tô đến B sớm hơn xe máy là 30 phút nên ta có:

$$\frac{60}{x} - \frac{60}{x + 20} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{60(x + 20) - 60x}{x(x + 20)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1200}{x(x + 20)} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra $x(x+20) = 2400$ hay $x^2 + 20x - 2400 = 0$

$$x^2 + 20x + 100 - 2\,500 = 0$$

$$(x+10)^2 - 50^2 = 0$$

$$(x+10-50)(x+10+50) = 0$$

$$(x-40)(x+60) = 0.$$

Suy ra $x = 40$ (thoả mãn điều kiện của ẩn) hoặc $x = -60$ (loại).

Vậy vận tốc của xe máy là 40 km/h, vận tốc của ô tô là 60 km/h.

8. Gọi V (km^3) và R (km) lần lượt là thể tích và bán kính của Trái Đất. Ta có:

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1086{,}23 \cdot 10^9}{4\pi}} \approx 6\,377 \text{ (km)}.$$

Chiều dài đường xích đạo (chu vi Trái Đất) là

$$2\pi R \approx 2\pi \cdot 6\,377 \approx 40\,067 \text{ (km)}.$$

9. a) Trong tam giác ABC vuông tại B, ta có:

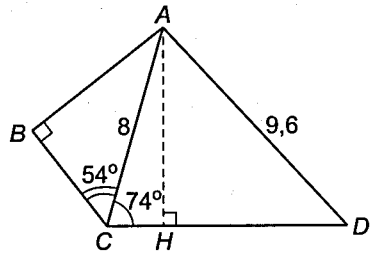
$AB = AC\sin ACB = 8\sin 54^\circ \approx 6{,}472$ (cm).

b) Kẻ đường cao AH của tam giác ACD, ta có:

$AH = AC\sin ACD = 8\sin 74^\circ \approx 7{,}690$ (cm).

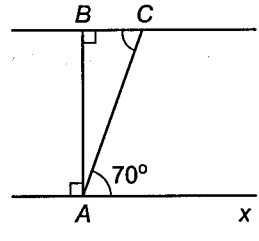
Ta có $\sin D = \dfrac{AH}{AD} \approx \dfrac{7{,}69}{9{,}6} \approx 0{,}801$.

Suy ra $\widehat{ADC} \approx 53^\circ 13'$.



10. Đổi: 2 km/h = $\dfrac{5}{9}$ m/s, 5 phút = 300 giây.

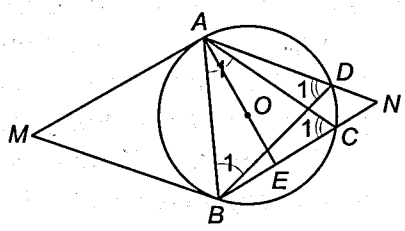
Hình bên mô tả khúc sông và đường đi của chiếc thuyền: AB là chiều rộng của khúc sông, AC là đoạn đường đi của chiếc thuyền, CAx là góc tạo bởi đường đi của chiếc thuyền và bờ sông.



Trong 5 phút thuyền đi được đoạn $CA = \dfrac{500}{3}$ m.

Tam giác ABC vuông tại B, ta có: $AB = AC\sin C = \dfrac{500}{3} \cdot \sin 70^\circ \approx 157$ (m).

11. a) (Hình 1a) Nối A với O, cắt BN tại E. Ta có:



Hình 1a

+ $AE \perp MA$ (tiếp tuyến MA vuông góc với bán kính AO);

BC // MA (vì $MANB$ là hình bình hành).

Do đó $AE \perp BC$, tức là $OE \perp BC$.

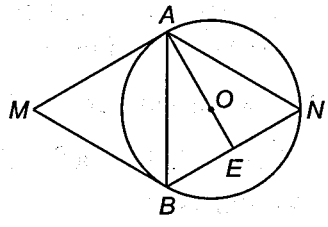
Tam giác OBC là tam giác cân ($OB = OC$), có OE là đường cao. Vậy OE cũng là đường trung trực của BC, mà A thuộc đường thẳng OE nên $AB = AC$. Do đó ABC là tam giác cân tại A.

+ Chứng minh tương tự, ta cũng có tam giác BAD cân tại B ($BA = BD$). Ta có $\widehat{D_1} = \widehat{C_1}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung nhỏ AB). Điều đó cho thấy hai tam giác cân ABC và BAD có các góc ở đáy bằng nhau. Do đó hai góc ở đỉnh cũng bằng nhau. Suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$. Mặt khác góc A là góc nội tiếp, còn góc BOC là góc ở tâm cùng chắn cung BC nên ta có: sđ$\widehat{BC}$ = sđ$\widehat{BOC}$ = 2sđ$\widehat{A_1}$.

Tương tự: sđ$\widehat{AD}$ = sđ$\widehat{AOD}$ = 2sđ$\widehat{B_1}$.

Từ đó suy ra sđ$\widehat{BC}$ = sđ$\widehat{AD}$ (đpcm).

b) (Hình 1b)



Hình 1b

+ Ta có $MA = MB$ (hai tiếp tuyến cắt nhau).

Do đó hình bình hành $AMBN$ là hình thoi, suy ra $AN = BN$. (1)

Mặt khác, do AM // BN và $AO \perp AM$ (do MA là tiếp tuyến) nên $AO \perp BN$, tức là $AE \perp BN$ hay $OE \perp BN$.

Tam giác cân OBN ($OB = ON$) có OE là đường cao nên OE cũng là đường trung trực của BN. Vì A thuộc đường trung trực của BN nên $AB = AN$.

Kết hợp với (1) ta có $AB = AN = BN$. Vậy ABN là tam giác đều, suy ra MAB cũng là tam giác đều.

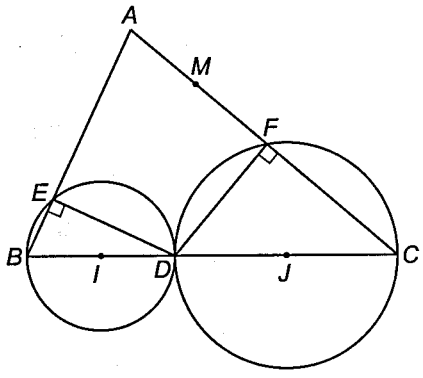
+ Từ kết quả trên, ta có $\widehat{ANB} = 60^o$; do đó sđ$\widehat{AB}$ = 2sđ$\widehat{ANB} = 120^o$.

Vậy độ dài cung AB là: $l_{AB} = \dfrac{120}{180}R\pi = \dfrac{2}{3} \cdot 6\pi = 4\pi$ (cm).

Diện tích hình quạt tròn ứng với cung AB là:

$$S_{AB} = \frac{120}{360}R^2\pi = \frac{1}{3} \cdot 36\pi = 12\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

12. a) (Hình 2) Tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông EBD là trung điểm của đoạn BD. Tâm J của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông FDC là trung điểm của đoạn DC. Vì D nằm trên BC nên ba điểm I, D và J thẳng hàng và ta có: $IJ = ID + DJ$.



Hình 2

Điều đó chứng tỏ (I) và (J) là hai đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau tại D.

b) Xét đường tròn (K) ngoại tiếp tam giác MDC.

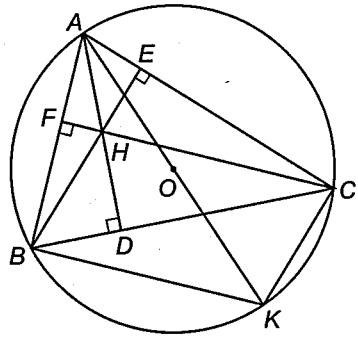
Do (K) và (I) đã có điểm D chung nên chúng chỉ có thể hoặc tiếp xúc nhau, hoặc cắt nhau.

Nếu (K) tiếp xúc với (I) thì D là tiếp điểm và K thẳng hàng với I và D, nghĩa là K thuộc đoạn DC; hơn nữa, ta có $KD = KC$. Vậy K phải trùng với trung điểm J của đoạn DC. Điều đó cũng có nghĩa là đường tròn (K) trùng với đường tròn (J) và M trùng với F (trái với giả thiết).

Vậy chỉ có thể xảy ra (K) và (I) là hai đường tròn cắt nhau.

Chú ý. Có thể lập luận rằng K không thẳng hàng với I và D nên IDK là một tam giác. Áp dụng bất đẳng thức tam giác ta có $|DK - DI| < IK < DK + DI$, suy ra (K) và (I) cắt nhau.

13. a) Xét trong đường tròn (O), ta có:



$\overset{\frown}{ACK} = \overset{\frown}{ABK} = 90^\circ$ (các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Suy ra $AC \perp KC; AB \perp KB$.

Mặt khác $AC \perp BH, AB \perp CH$.

Do đó $BH \,//\, KC$, $CH \,//\, KB$.

Vậy $BHCK$ là hình bình hành.

Suy ra $BH = CK, CH = BK$.

b) Hai tam giác ABD và AKC có:

$\overset{\frown}{ADB} = \overset{\frown}{ACK} = 90^\circ$;

$\overset{\frown}{ABD} = \overset{\frown}{AKC}$ (hai góc nội tiếp của (O) cùng chắn cung $\overset{\frown}{AC}$).

Suy ra $\Delta ABD \backsim \Delta AKC$ (g.g).

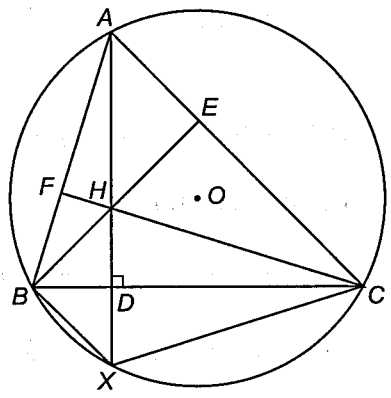
Do đó $\dfrac{AB}{AK} = \dfrac{AD}{AC}$ hay $AD \cdot AK = AB \cdot AC$ (đpcm).

14. a) Hai tam giác BDH và BDX có:

BD là cạnh chung;

$\widehat{BDH} = \widehat{BDX} = 90^o$;

$DH = DX$ (theo gt).



Vậy $\Delta BDH = \Delta BDX$ (c.g.c).

Suy ra $\widehat{HBD} = \widehat{DBX}$. (1)

Mặt khác $\widehat{CBX} = \widehat{CAX}$ (hai góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{CX}$). Kết hợp với (1), ta có:

$\widehat{EBC} = \widehat{HBD} = \widehat{DBX} = \widehat{CBX} = \widehat{CAX} = \widehat{CAD} = 90^o - \widehat{ACB}$.

Do tổng các góc của tam giác EBC bằng 180^o nên:

$$\widehat{BEC} = 180^o - \widehat{EBC} - \widehat{ACB} = 90^o.$$

Vậy BE vuông góc với AC. Tương tự CF vuông góc AB. Vậy H là trực tâm tam giác ABC.

b) Do $\widehat{HDB} = \widehat{HFB} = 90^o$ nên tứ giác $HDBF$ nội tiếp đường tròn đường kính BH.

Do đó: $\widehat{HDF} = \widehat{HBF}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{HF}$ của đường tròn đường kính BH).

Tương tự $\widehat{HDE} = \widehat{HCE}$.

Mặt khác, ta có: $\widehat{HBF} = 90^o - \widehat{BAC} = \widehat{HCE}$.

Do đó: $\widehat{HDF} = \widehat{HBF} = \widehat{HCE} = \widehat{HDE}$. Vậy H nằm trên đường phân giác góc EDF của ΔDEF.

Tương tự, H cũng nằm trên các đường phân giác của các góc DEF, DFE. Do đó H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

15. a) Thể tích phần hình nón của vật thể là $V_1 = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi$ (cm^3).

Thể tích phần nửa hình cầu của vật thể là

$$V_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 18\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Thể tích của vật thể là $V = V_1 + V_2 = 30\pi$ (cm^3).

Diện tích xung quanh phần hình nón của vật thể là

$$S_1 = \pi R l = \pi \cdot 3 \cdot \sqrt{4^2 + 3^2} = 15\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Diện tích xung quanh phần nửa hình cầu của vật thể là

$$S_2 = 2\pi R^2 = 2\pi \cdot 3^2 = 18\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Diện tích bề mặt của vật thể là $S = S_1 + S_2 = 33\pi$ (cm^2).

b) Thể tích của hình trụ là $V = \pi R^2 h = \pi R^2 \cdot 4 = 30\pi$ (cm^3).

Suy ra, bán kính của hình trụ là $R = \sqrt{\frac{30}{4}} \approx 2{,}74$ (cm).

c) Diện tích toàn phần của hình trụ là:

$$S = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi \cdot 2{,}74 \cdot 4 + 2\pi \cdot 2{,}74^2 \approx 116 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Diện tích cần sơn của 1 000 hình trụ là $116 \cdot 1\,000 = 116\,000$ (cm^2) $= 11{,}6$ (m^2).

Vậy cần 3 hộp sơn để sơn 1 000 hình trụ như câu b.

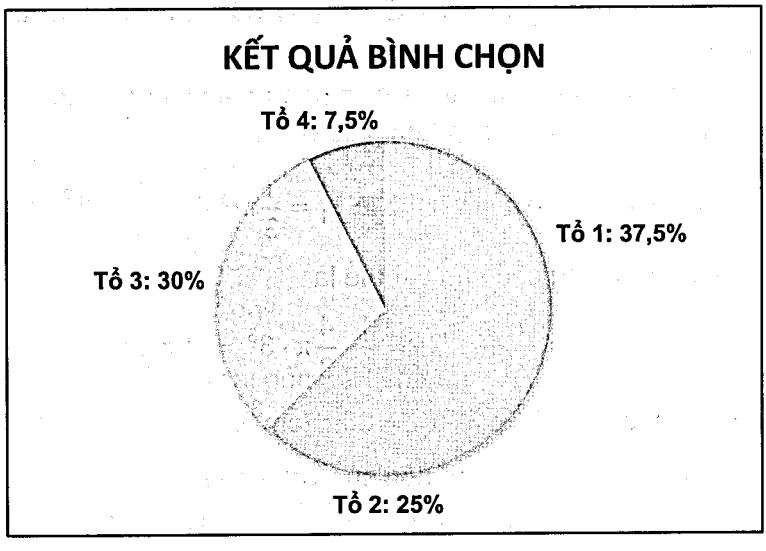
16. a) Tổng số bình chọn là $n = 15 + 10 + 12 + 3 = 40$. Tỉ lệ bình chọn cho các tổ 1, 2, 3, 4 tương ứng là:

$\frac{15}{40}.100\% = 37{,}5\%; \frac{10}{40}.100\% = 25\%; \frac{12}{40}.100\% = 30\%; \frac{3}{40}.100\% = 7{,}5\%.$

Bảng tần số tương đối:

Tổ	1	2	3	4
Tần số tương đối	37,5%	25%	30%	7,5%

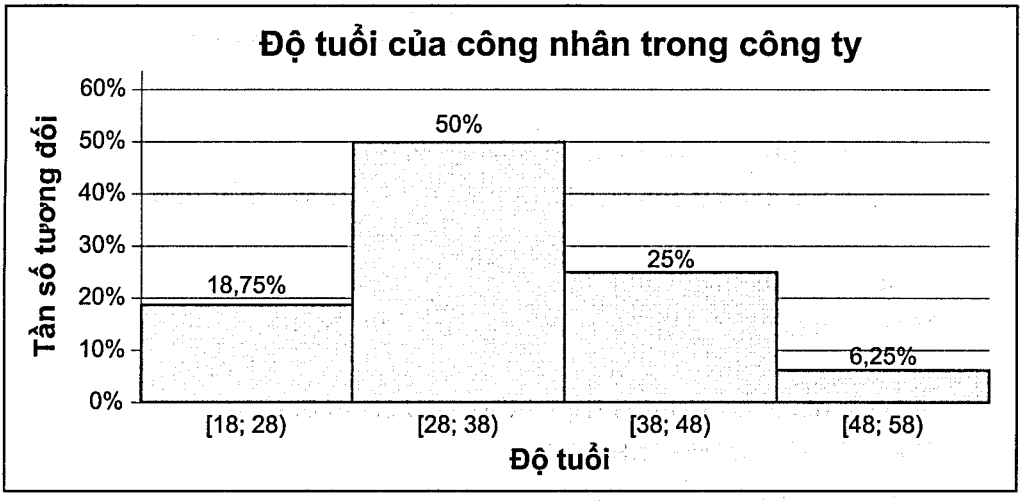
b) Biểu đồ hình quạt tròn:



17. a) Bảng tần số tương đối ghép nhóm:

Độ tuổi	[18; 28)	[28; 38)	[38; 48)	[48; 58)
Tần số tương đối	18,75%	50%	25%	6,25%

b) Biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm dạng cột:



18. a) Ta có bảng sau:

	A	B	C	D
A	(A, A)	(A, B)	(A, C)	(A, D)
B	(B, A)	(B, B)	(B, C)	(B, D)
C	(C, A)	(C, B)	(C, C)	(C, D)
D	(D, A)	(D, B)	(D, C)	(D, D)

Mỗi ô trong bảng thể hiện một kết quả có thể. Chẳng hạn ô (C, B) nghĩa là hành khách số 1 chọn toa C, hành khách số 2 chọn toa B. Các kết quả có thể là đồng khả năng do mỗi hành khách chọn ngẫu nhiên một toa tàu để bước lên.

b) Không gian mẫu Ω là tập hợp 16 ô trên: Ω = {(A, A); (A, B);...; (D, C); (D, D)}.

c) + Có 4 kết quả thuận lợi cho biến cố E là (A, A); (B, B); (C, C); (D, D).

Vậy $P(E) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

+ Có 9 kết quả thuận lợi cho biến cố F là (A, A); (A, C); (A, D); (C, A); (C, C); (C, D); (D, A); (D, C); (D, D).

Vậy $P(F) = \frac{9}{16}$.

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam xin trân trọng cảm ơn các tác giả có tác phẩm, tư liệu được sử dụng, trích dẫn trong cuốn sách này.

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Chủ tịch Hội đồng thành viên kiêm Tổng Giám đốc NGUYỄN TIẾN THANH

Chịu trách nhiệm nội dung:
Tổng biên tập PHẠM VĨNH THÁI

Biên tập nội dung: HOÀNG THỊ THANH – ĐỖ CHÂU GIANG
Thiết kế sách: HOÀNG ANH TUẤN
Trình bày bìa: NGUYỄN BÍCH LA
Sửa bản in: PHẠM THỊ TÌNH
Chế bản: CTCP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI

Bản quyền thuộc Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.
Tất cả các phần của nội dung cuốn sách này đều không được sao chép, lưu trữ, chuyển thể dưới bất kì hình thức nào khi chưa có sự cho phép bằng văn bản của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

BÀI TẬP TOÁN 9 - Tập hai

Mã số: G1BH9T002H24

In 55.000 bản, (QĐ in số 05BT) khổ 17 x 24 cm.
Đơn vị in: Xí Nghiệp In II - Công Ty TNHH MTV In Ba Đình
Địa chỉ: 258 Nguyễn Trãi, Phường Nguyễn Cư Trinh, Quận 1, TP. Hồ Chí Minh
Số ĐKXB: 02-2024/CXBIPH/15-2316/GD
Số QĐXB: 150 TBT/QĐ-GD-HCM ngày 20 tháng 5 năm 2024
In xong và nộp lưu chiểu tháng 6 năm 2024.
Mã số ISBN: Tập một: 978-604-0-39149-0
Tập hai: 978-604-0-39150-6